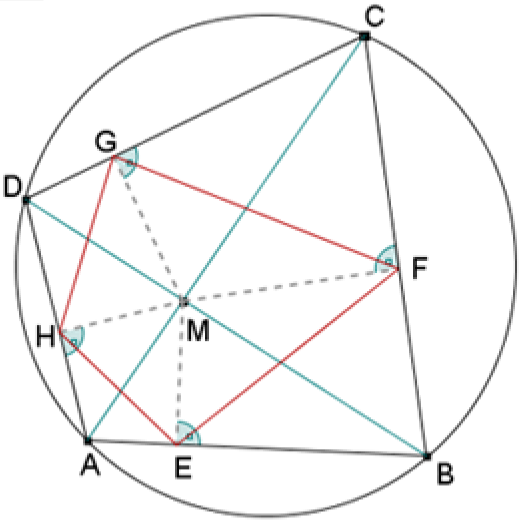
ESERCITAZIONI

Il problema della settimana /

Lista dei problemi

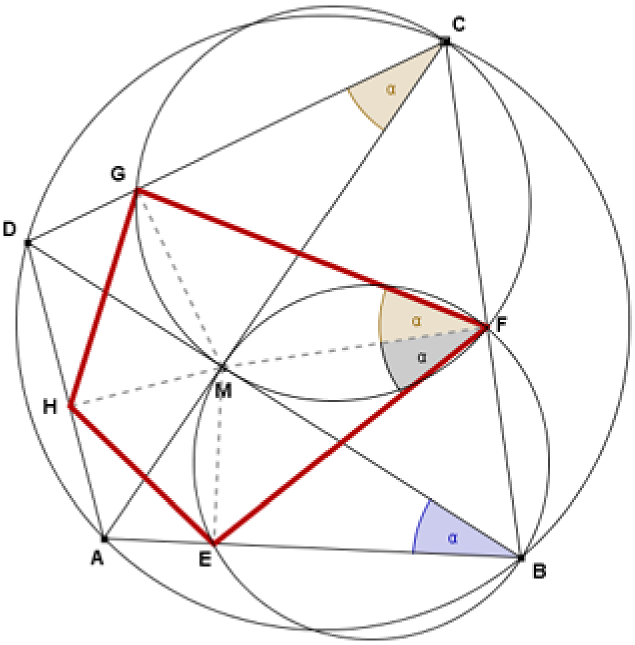
1.



Sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza; sia M il punto di intersezione delle sue diagonali; siano E, F, G e H i piedi delle perpendicolari condotte da M ai lati di ABCD.
Determinare il centro della circonferenza inscritta nel quadrilatero EFGH.

Tratto da: International Mathematical Talent Search - Round 26 - problema 5

Risoluzione



Il centro della circonferenza inscritta nel quadrilatero EFGH è il punto M stesso.

Considerata la circonferenza circoscritta al quadrilatero MFCG, si ha che $G\widehat{F}M \simeq G\widehat{C}M$ perchè insistono sullo stesso arco GM

Considerata la circonferenza circoscritta al quadrilatero MFBE, si ha che $E\widehat{B}M \simeq E\widehat{F}M$ perchè insistono sullo stesso arco EM

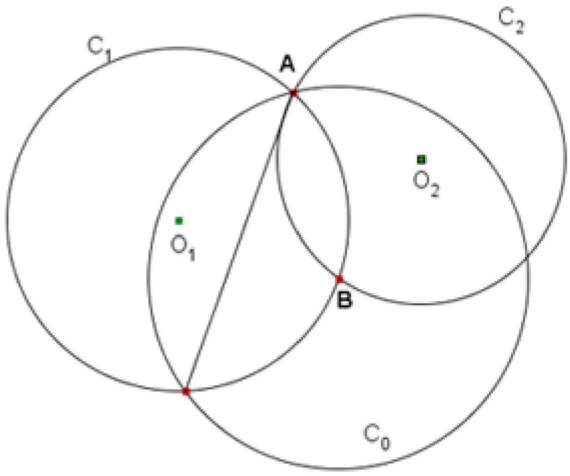
Considerata la circonferenza circoscritta al quadrilatero ABCD, si ha che $A\widehat{B}D \simeq A\widehat{C}D$ perchè insistono sullo stesso arco AD

Per transitività si ottiene che $G\widehat{F}M \simeq E\widehat{F}M$ e quindi EM è bisettrice dell'angolo $E\widehat{F}G$.

Lo stesso si può dimostrare per gli altri angoli interni del quadrilatero EFGH.

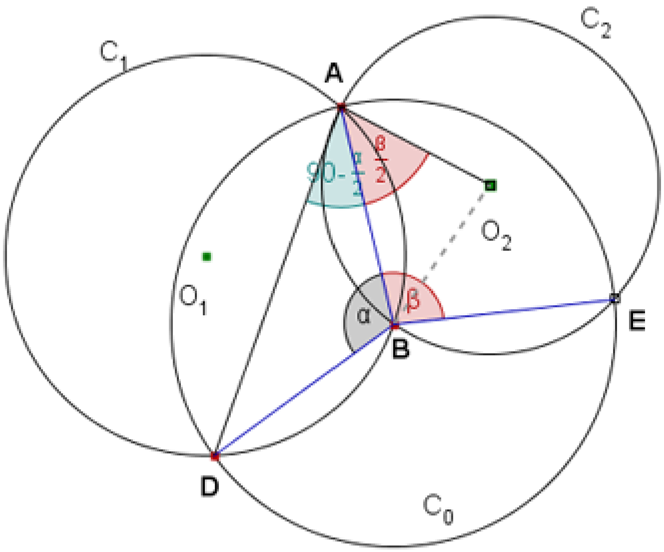
Essendo intersezione delle bisettrici, M è il centro della circonferenza inscritta nel quadrilatero.

2.



Siano C_1 e C_2 due circonferenze che si intersecano nei punti A e B. Sia C_0 una circonferenza per A con centro B. Determinare le condizioni sotto le quali la corda comune tra C_0 e C_1 sia tangente a C_2

Tratto da: [International Mathematical Talent Search]
- Round 15 - problema 5
Risoluzione



Come con le notazioni in figura, indichiamo $A\widehat{B}D=\alpha$ e $A\widehat{B}E=\beta$.

Poichè ABD è un triangolo isocele, allora $B\widehat{A}D=90-\frac{\alpha}{2}$

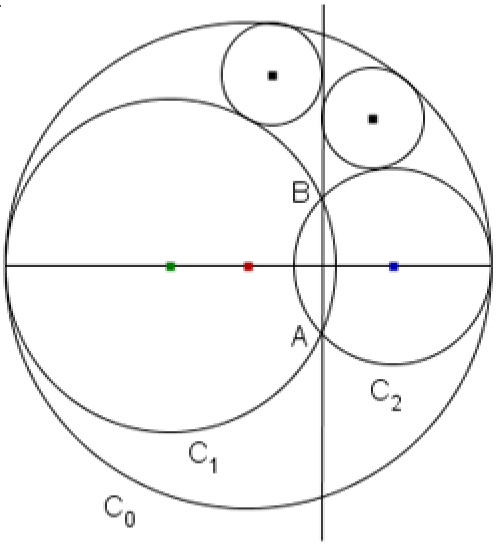
Poichè AB = BE, allora $B\widehat{A}O_2=A\widehat{B}O_2=\frac{\beta}{2}$

Di conseguenza $D\widehat{A}O_2=90-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$

Affinchè DA risulti tangente a C_2 tale angolo deve essere retto.

Quindi: $\alpha=\beta$ è la condizione richiesta

3.



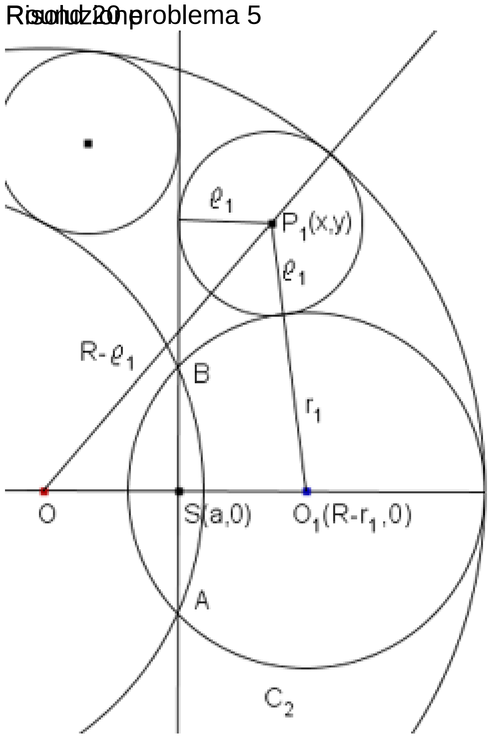
Nella figura i centri delle circonferenze C_0, C_1 e C_2 sono allineati e C_1 e C_2 sono tangenti a C_0.

A e B sono i punti di intersezione di C_1 e C_2.

Dimostrare che sono congruenti la circonferenza tangente a C_0, C_1 e ad AB e la circonferenza tangente a C_0 , C_2 e ad AB.

Tratto da: [International Mathematical Talent Search]() round 20 problema 5

Risoluzione



Soluzione analitica.

Assumiamo le coordinate rispetto l'origine il centro O delle circonferenza C_0 e l'asse x la retta dei centri delle circonferenze.

Poniamo:
R il raggio della circonferenza C_0
r_1 il raggio della circonferenza C_1

ϱ_1 il raggio della circonferenza tangente a C_0, C_1 e ad AB
(x,y) le coordinate del suo centro P_1
a l'ascissa del punto S in cui la retta AB interseca l'asse x.

In conseguenza alle condizioni di tangenza, x, y e ϱ_1 debbono soddisfare le equazioni

$$x^2+y^2=(\boldsymbol{R}-\varrho_1)^2$$
$$(x-\boldsymbol{R}+r_1)^2=(r_1+\varrho_1)^2$$
$$x-a=\varrho_1$$

Il sistema, risolto, fornisce

$$\varrho_1=\frac{(R-a)(R-r_1)}{2R}$$

In modo analogo, si ottiene, per il raggio dell'altra circonferenza tangente, il valore

$$\varrho_2=\frac{(R+a)(R-r_2)}{2R}$$

Uguagliando i due raggi, si ottiene la condizione:

$$a=\frac{R(r_2-r_1)}{2R-r_1-r_2}$$

Ma se calcolando *a* dall'intersezione delle due circonferenze, si ottiene proprio tale valore.

I calcoli nel dettaglio risoluzione del problema

E' pervenuta un'altra dimostrazione
risoluzione del problema

