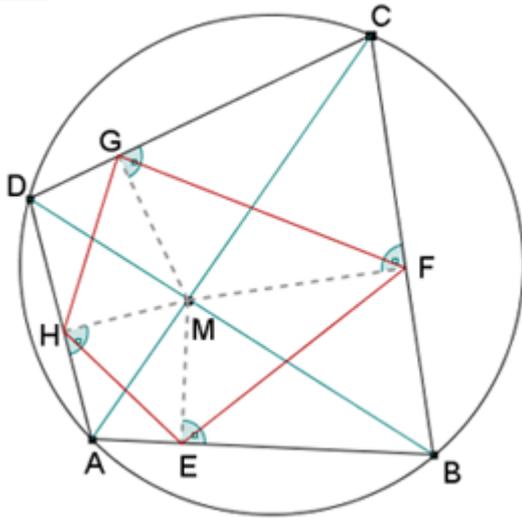


ESERCITAZIONI

Il problema della settimana /

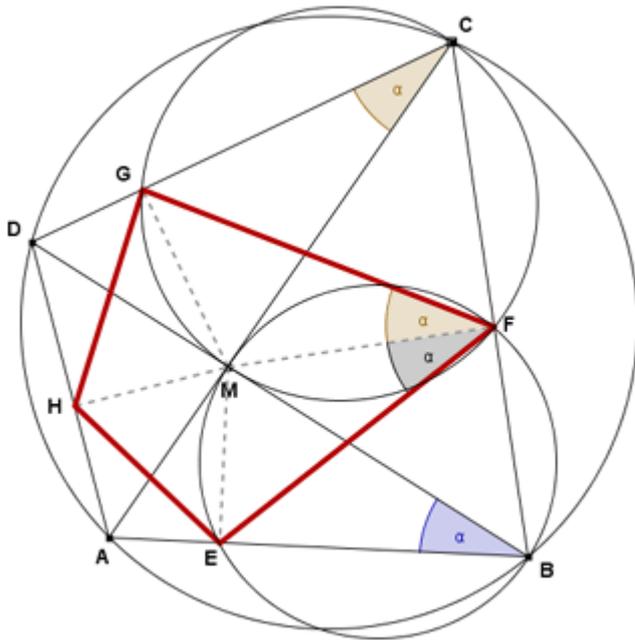
Lista dei problemi

1.



Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza; sia M il punto di intersezione delle sue diagonali; siano E , F , G e H i piedi delle perpendicolari condotte da M ai lati di $ABCD$. Determinare il centro della circonferenza inscritta nel quadrilatero $EFGH$.

Tratto da: [International Mathematical Talent Search](#) - Round 26 - problema 5



Il centro della circonferenza inscritta nel quadrilatero EFGH è il punto M stesso.

Considerata la circonferenza circoscritta al quadrilatero MFCG, si ha che $\widehat{GFM} \simeq \widehat{GCM}$ perchè insistono sullo stesso arco GM

Considerata la circonferenza circoscritta al quadrilatero MFBE, si ha che $\widehat{EBM} \simeq \widehat{EFM}$ perchè insistono sullo stesso arco EM

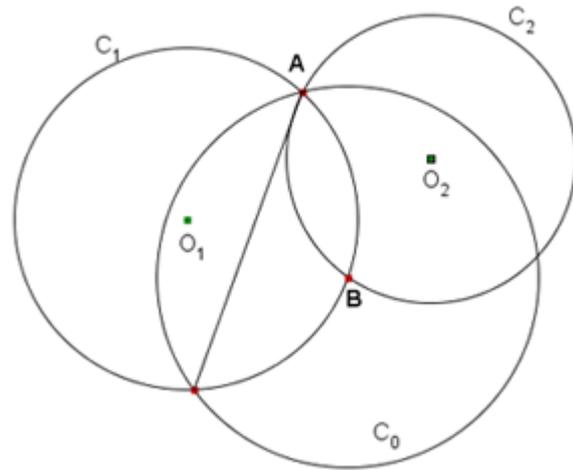
Considerata la circonferenza circoscritta al quadrilatero ABCD, si ha che $\widehat{ABD} \simeq \widehat{ACD}$ perchè insistono sullo stesso arco AD

Per transitività si ottiene che $\widehat{GFM} \simeq \widehat{EFM}$ e quindi EM è bisettrice dell'angolo \widehat{EFG} .

Lo stesso si può dimostrare per gli altri angoli interni del quadrilatero EFGH.

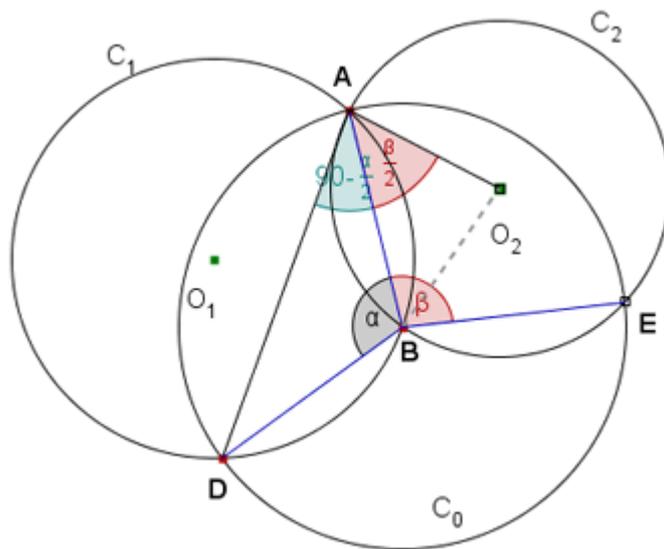
Essendo intersezione delle bisettrici, M è il centro della circonferenza inscritta nel quadrilatero.

2.



Siano C_1 e C_2 due circonferenze che si intersecano nei punti A e B. Sia C_0 una circonferenza per A con centro B. Determinare le condizioni sotto le quali la corda comune tra C_0 e C_1 sia tangente a C_2

Tratto da: [International Mathematical Talent Search](http://www.diflo.it/International-Mathematical-Talent-Search/)
 - Round 15 - problema 5
 Risoluzione



Come con le notazioni in figura, indichiamo $\widehat{ABD} = \alpha$ e $\widehat{ABE} = \beta$.

Poichè ABD è un triangolo isoscele, allora $\widehat{BAD} = 90 - \frac{\alpha}{2}$

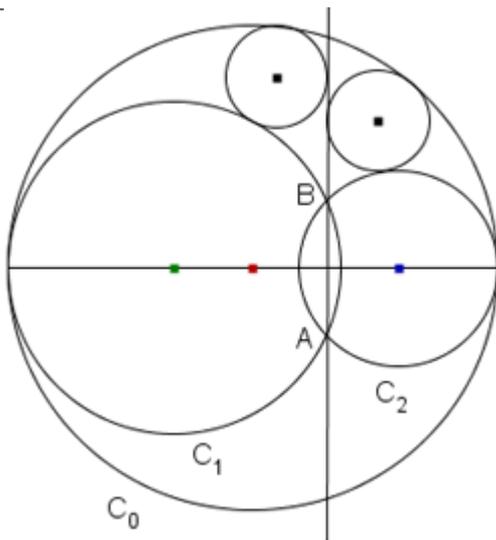
Poichè AB = BE, allora $\widehat{BAO_2} = \widehat{ABO_2} = \frac{\beta}{2}$

Di conseguenza $\widehat{DAO_2} = 90 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$

Affinchè DA risulti tangente a C_2 tale angolo deve essere retto.

Quindi: $\alpha = \beta$ è la condizione richiesta

3.



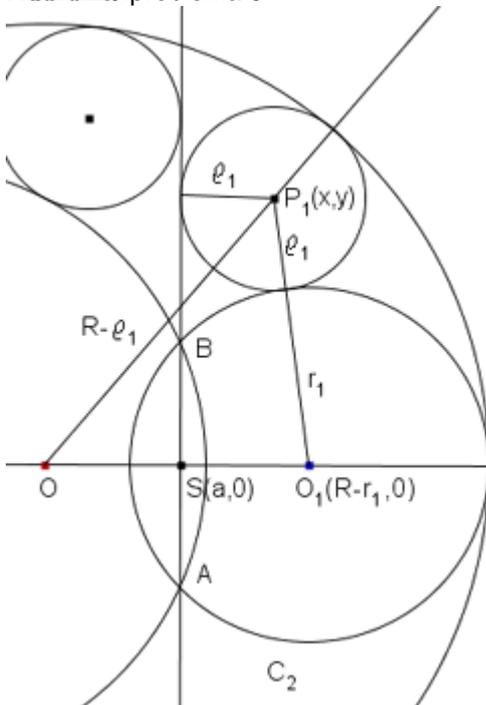
Nella figura i centri delle circonferenze C_0 , C_1 e C_2 sono allineati e C_1 e C_2 sono tangenti a C_0 .

A e B sono i punti di intersezione di C_1 e C_2 .

Dimostrare che sono congruenti la circonferenza tangente a C_0 , C_1 e ad AB e la circonferenza tangente a C_0 , C_2 e ad AB.

Tratto da: [International Mathematical Talent Search](http://www.diflo.it/International-Mathematical-Talent-Search/)

Risolvere il problema 5



Soluzione analitica.

Assumiamo le coordinate rispetto l'origine il centro O delle circonferenza C_0 e l'asse x la retta dei centri delle circonferenze.

Poniamo:

R il raggio della circonferenza C_0

r_1 il raggio della circonferenza C_1

ℓ_1 il raggio della circonferenza tangente a C_0 , C_1 e ad AB
 (x,y) le coordinate del suo centro P_1
 a l'ascissa del punto S in cui la retta AB interseca l'asse x.

In conseguenza alle condizioni di tangenza, x, y e ℓ_1 debbono soddisfare le equazioni

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (R - \ell_1)^2 \\(x - R + r_1)^2 &= (r_1 + \ell_1)^2 \\x - a &= \ell_1\end{aligned}$$

Il sistema, risolto, fornisce

$$\ell_1 = \frac{(R-a)(R-r_1)}{2R}$$

In modo analogo, si ottiene, per il raggio dell'altra circonferenza tangente, il valore

$$\ell_2 = \frac{(R+a)(R-r_2)}{2R}$$

Uguagliando i due raggi, si ottiene la condizione:

$$a = \frac{R(r_2 - r_1)}{2R - r_1 - r_2}$$

Ma se calcolando a dall'intersezione delle due circonferenze, si ottiene proprio tale valore.

I calcoli nel dettaglio [risoluzione del problema](#)

E' pervenuta un'altra dimostrazione
[risoluzione del problema](#)

