www.diflo.it

ESERCITAZIONI

Il problema della settimana /

Lista dei problemi

1.

In un triangolo ABC con AB = BC la retta parallela al lato BC e passante per il punto medio di AB interseca

la circonferenza inscritta nel punto medio di AC e in un altro punto F.
Dimostrare che la tangente in F alla circonferenza inscritta e la bisettrice dell'angolo C si intersecano nello stesso punto del lato AB.

Tratto da: 9-th All-Russian Mathematical Olympiad 2003
Fourth Round - Grade 9 - Problema 3
Risposta

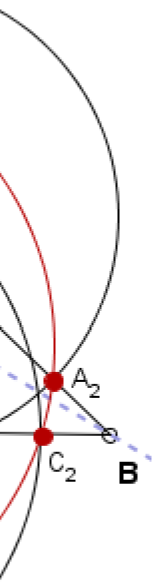
Sia E in punto in cui la tangente in F alla circonferenza interna al triangolo interseca AB.

Dobbiamo dimostrare che CE è bisettrice dell'angolo interno C.
Sia I l'incentro del triangolo.
Con le notazioni in figura, per la tangenza si ha
EM ≅ EF
DF ≅ DK
CK ≅ CH
AH ≅ AM
Gli ultimi quattro segmenti sono inoltre congruenti, essendo AH ≅ CH.
Posto $A\hat{C}B=\alpha$,
allora
$A\hat{H}F=\alpha$ per il parallelismo
$H\hat{I}F=2\alpha$ (angolo al centro che insiste sull'arco HF, su cui insiste $A\hat{H}F$)
$H\hat{I}K=180-\alpha$ (differenza di angoli nel quadrilatero HIKC)
Quindi
$F\hat{I}K=180-\alpha$ (differenza di angoli nell'angolo giro in I)
Infine $F\hat{D}K=\alpha$ (differenza di angoli nel quadrilatero FDKI).
Ne segue che il trapezio CHFD è isoscele e perciò CH ≅ FD.
Per transitività FD ≅ MA.
Quindi ED = EF + FD ed EA = EM + MA sono congruenti.
I triangoli ECA e ECD sono quindi congruenti e perciò EC è la bisettrice dell'angolo C.

- Una dimostrazione che utilizza le simmetrie della costruzione

2.

Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H.



La circonferenza con centro il punto medio di BC e passante per H interseca la retta BC in A_1 e A_2. Analogamente, la circonferenza con centro il punto medio di CA e passante per H interseca la retta CA in B_1 e B_2, e la circonferenza con centro il punto medio di AB e passante per H interseca la retta AB in C_1 e C_2. Dimostrare che A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 giacciono su una medesima circonferenza.

Tratto da: [IMO 2008]
49th INTERNATIONALMATHEMATICAL OLYMPIAD MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Risposta

Premet

il Teorema
Se H è l'ortocentro di un triangolo ABC e H_1, H_2 e H_3 sono i piedi delle altezze, allora

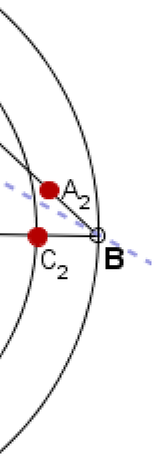
$CH \cdot HH_1 = BH \cdot HH_3 = AH \cdot H_2$ (*)

Una dimostrazione
Considerando la circonferenza circoscritta e prolungate le altezze fino ad intersecarla in A', B' e C' si ha
$CH \cdot HC' = BH \cdot HB' = AH \cdot HA'$ (**)
(potenza di H rispetto la circonferenza)
Ma $H_1C' = HH_1$ (e relazioni analoghe per le altre altezze). Per dimostrarlo, è sufficiente dimostrare che gli angoli $AC'H_1$ e AHH_1 sono congruenti.
Lo sono perchè sono entrambi congruenti all'angolo interno in B.
Quindi $HC' = 2HH_1$ (***)

La relazione (*) segue da (**) sostituendo (***) e dividendo per 2.

Dimostrazione di IMO 2008

La circonferenza cercata è concentrica a quella circoscritta: il suo centro deve stare sugli assi dei lati di



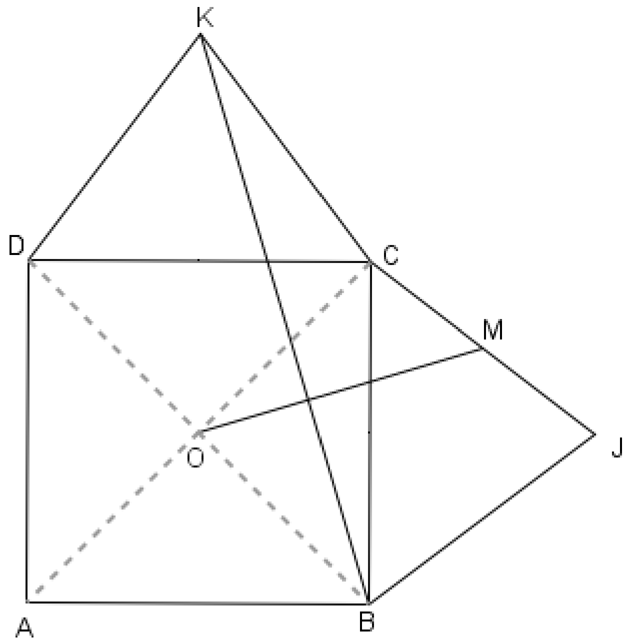
ABC, perchè deve essere equidistante da A_1 e A_2; da B_1 e B_2; da C_1 e C_2.
E le tre coppie di punti hanno lo stesso asse dei lati del triangolo.
Dimostriamo che la distanza tra il circocentro O del triangolo ABC e uno qualunque dei punti A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 è costante (dato il triangolo).
Consideriamo la circonferenza di diametro il lato AB. Questa passa per H_2 e si ha
$AH \cdot HH_2 = AP^2 - HP^2$(°)
(potenza di H rispetto alla circonferenza: P è il centro e AP è il raggio)
Ne segue

$$\begin{aligned} OC_1^2 &= OP^2 + PC_1^2 \\ &= OP^2 + PH^2 = \\ &= OP^2 + AP^2 - AH \cdot HH_2 = \\ &= OA^2 - AH \cdot HH_2 \end{aligned}$$

nel terzo passaggio si è usato (°)
Poichè OA è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ed il prodotto $AH \cdot HH_2$ è costante se si cambia lato e altezza (per la (*)), ne segue che ripetendo lo stesso calcolo per OB_1 e OA_1 si ottengono quantità uguali.

Un'altra dimostrazione

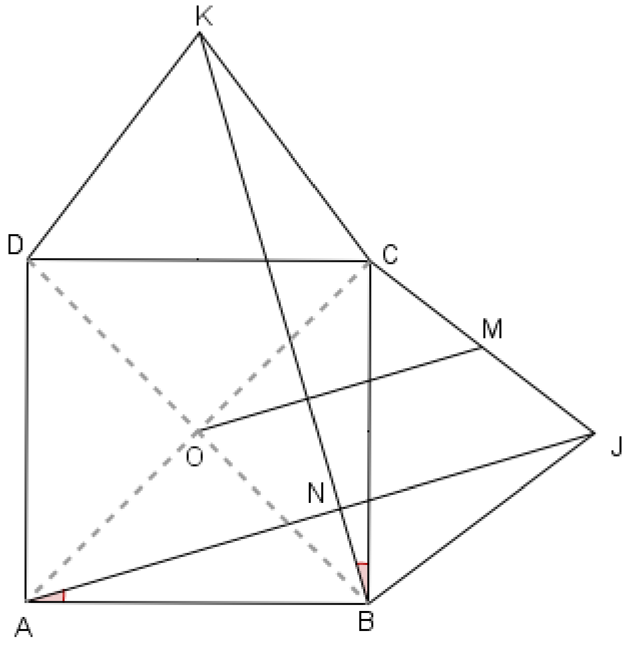
3.



Sia ABCD un quadrato di centro O. Si costruiscano due triangoli isosceli BCJ e CDK, esterni al quadrato, di base BC e CD rispettivamente e congruenti fra loro. Sia poi M il punto medio di CJ.
Si provi che le rette OM e BK sono perpendicolari.

Tratto da: Finale delle Olimpiadi italiane di Matematica, Cesenatico 2009
1999
9 maggio 2009 - problema 2

Risoluzione



Osserviamo che AO=OC e JM=MC, per cui OM||AJ.
E' quindi sufficiente dimostrare la perpendicolarità tra AJ e BK.
Il triangolo KCB è congruente al triangolo ABJ (due lati e l'angolo compreso).
Quindi $J\widehat{A}B \simeq K\widehat{B}C$
Essendo $A\widehat{B}C$ retto ne segue che $A\widehat{N}B$ è retto.

