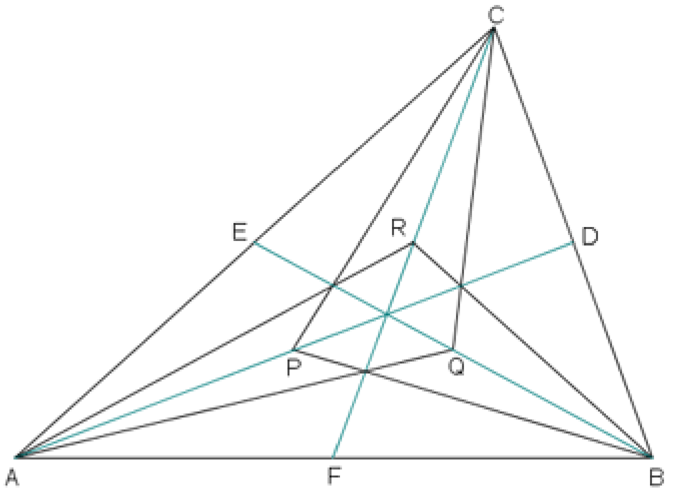
ESERCITAZIONI

Il problema della settimana /

Lista dei problemi

1.



Nel triangolo ABC, siano D, E ed F i punti medi dei lati e siano P, Q ed R i punti medi delle mediane AD, BE e CF, rispettivamente, come mostrato in figura.
Dimostrare che il valore di

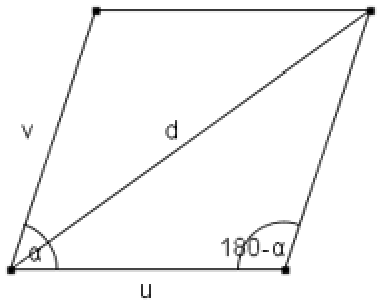
$$\frac{AQ^2+AR^2+BP^2+BR^2+CP^2+CQ^2}{AB^2+BC^2+CA^2}$$

non dipende dal triangolo e trovare tale valore.

Tratto da: International Mathematical Talent Search
Round 32 - problema 5

Risoluzione

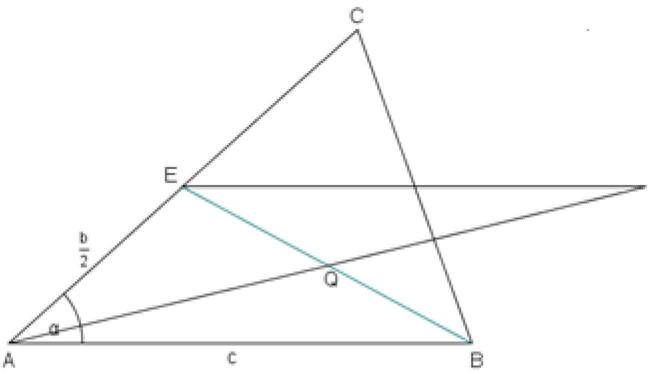
Una risoluzione che utilizza il metodo delle coordinate viene fornita nel file pdf allegato



Risoluzione trigonometrica

Premettiamo il calcolo della misura della diagonale di un paralleogramma conoscendo i due lati e l'angolo compreso. Per il teorema di Carnot, si ha
$d^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos(180 - \alpha) = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

Indichiamo le misure dei lati e degli angoli del triangolo ABC con la consueta notazione goniometrica.



AQ è metà della diagonale del parallelogramma costruito su AB ed AE.
Si ha quindi

$$AQ^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{4} + c^2 + bc\cos\alpha\right)$$

Analogamente, si ottiene per gli altri segmenti

$$AR^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{4} + b^2 + bc\cos\alpha\right)$$

$$BP^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{4} + c^2 + ac\cos\beta\right)$$

$$BR^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{4} + a^2 + ac\cos\beta\right)$$

$$CP^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{4} + b^2 + ab\cos\gamma\right)$$

$$CQ^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{4} + a^2 + ab\cos\gamma\right)$$

Le relazioni vengono addizionate membro a membro.

Per *eliminare* i termini che contengono gli angoli, si utilizzano le relazioni trigonometriche

$$a\cos\beta + b\cos\alpha = c$$

$b\cos\gamma + c\cos\beta = a$

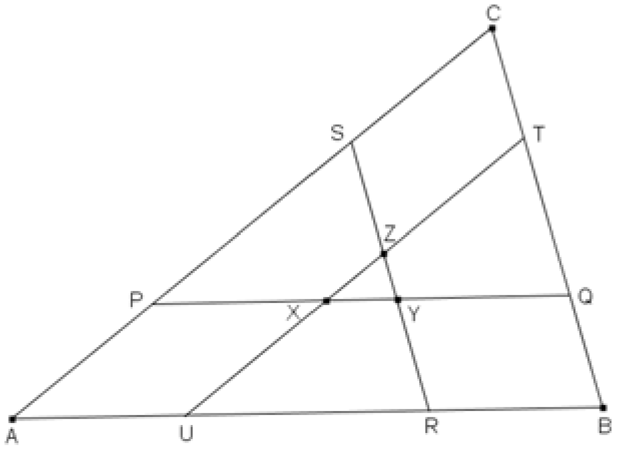
$c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$

Si ottiene quindi

$$AQ^2 + AR^2 + BP^2 + BR^2 + CP^2 + CQ^2 = \frac{7}{8}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Il rapporto costante vale quindi $\frac{7}{8}$

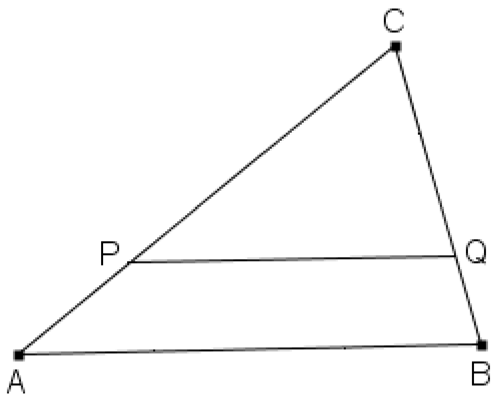
2.



Nel triangolo ABC, i segmenti PQ, RS e TU sono paralleli ai lati AB, BC e CA, rispettivamente, e si intersecano nei punti X, Y e Z, come mostrato in figura.
Determinare l'area di ABC se ciascuno dei segmenti PQ, RS e TU divide l'area di ABC in due parti equivalenti e se l'area del triangolo XYZ è una unità.
La risposta deve essere data nella forma $a+b\sqrt{2}$ dove a e b sono numeri interi positivi.

Tratto da: International Mathematical Talent Search
Round 38 - problema 5

Risoluzione

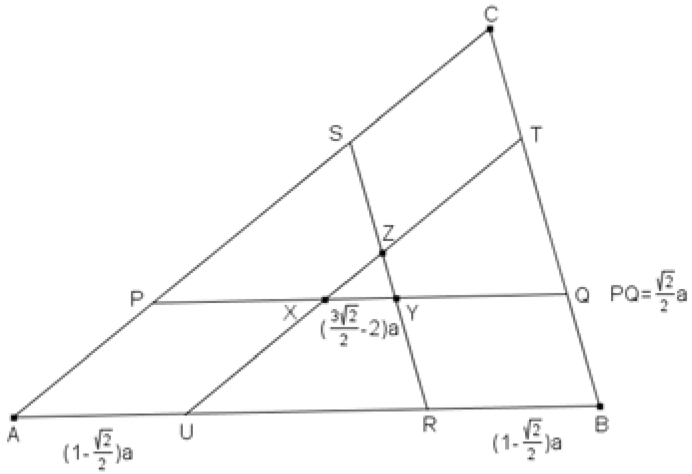


Se un segmento PQ è parallelo al lato AB di un triangolo e lo divide in due parti equivalenti, allora, poichè la parte triangolare PQC è simile al triangolo ABC, il rapporto di similitudine deve soddisfare la seguente relazione con le aree dei triangoli

$$\varrho^2=\frac{\mathcal{A}_{PQC}}{\mathcal{A}_{ABC}}$$

Poichè il rapporto tra le aree deve essere uguale a $\frac{1}{2}$ allora deve essere $\varrho=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Poichè lo stesso succede con gli altri lati TU ed



SR, allora i triangoli PQC, UTB e ARS, essendo simili ad ABC con lo stesso rapporto, sono congruenti, e perciò AR=UB=PQ.

Detto *AB* = *a*, deve essere $AR=UB=PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Di conseguenza, $PX=AU=YQ=RB=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$.

Ne segue che $XY=PQ-PX-YQ=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)a$.

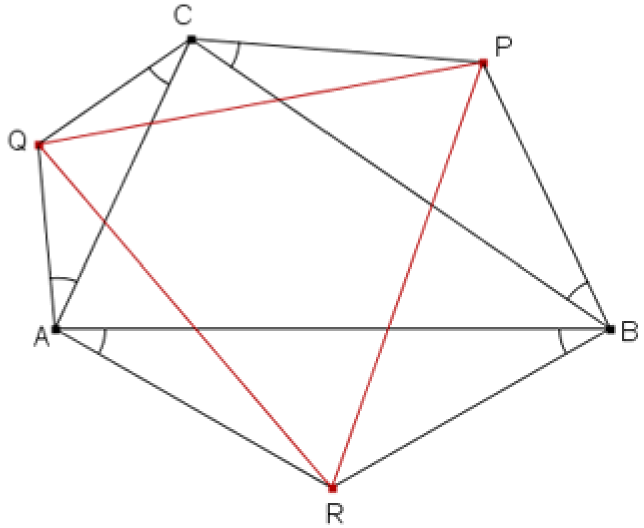
E quindi $\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$ è il rapporto di similitudine tra i triangoli XYZ e ABC.

Ne segue che tra le aree si ha $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)^2=\frac{\mathcal{A}_{XYZ}}{\mathcal{A}_{ABC}}$

Poichè l'area del triangolo XYZ è una unità, allora si ha

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\right)^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\right)^2}=34+24\sqrt{2}\approx 68$$

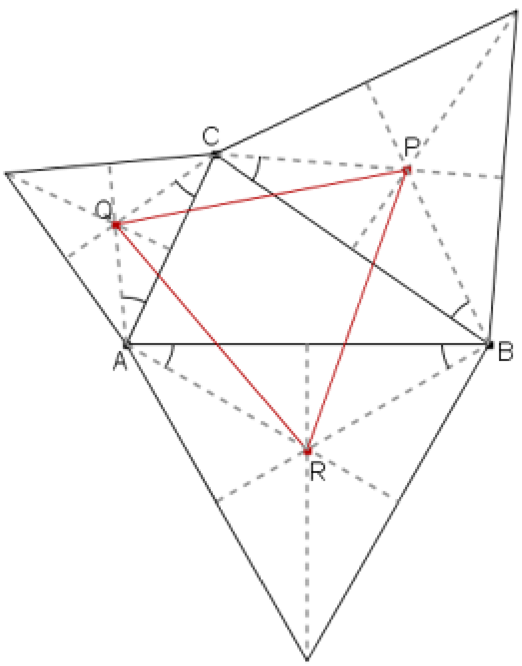
3.



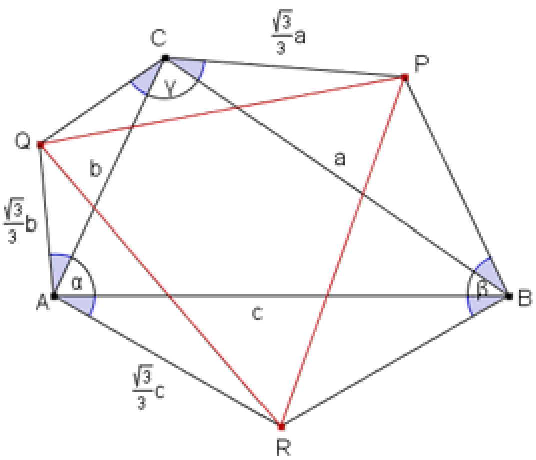
Sia ABC un arbitrario triangolo e costruire i punti P, Q e R tali che ciascuno degli angoli segnati in figura risultino di *30* °.
Dimostrare che il triangolo PQR è equilatero.

Tratto da: International Mathematical Talent Search
Round 4 - problema 4

Risoluzione



Osserviamo innanzitutto che l'esercizio è, in pratica, il cosiddetto teorema di Napoleone, la cui ipotesi richiede la costruzione dei triangoli equilateri su ciascuno dei lati del triangolo ABC ed il triangolo PQR che deve essere dimostrato equilatero è quello i cui vertici sono i centri di tali triangoli equilateri.



Dimostrazione trigonometrica

Indichiamo i lati e gli angoli del triangolo con la notazione standard della trigonometria (vedi figura).

Innanzitutto, i lati uguali dei triangoli isosceli ACQ, ABR e BCP si ottengono moltiplicando per $\frac{\sqrt{3}}{3}$ le misure del triangolo ABC (teorema dei seni).

Il teorema di Carnot applicato ai triangoli ARQ, BPR e CQP dà le seguenti relazioni

$$QR^2=AR^2+AQ^2-2\cdot AR\cdot AQ\cdot\cos(\alpha+60)=\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}b^2-\frac{2}{3}bc\cos(\alpha+60)$$

$$PR^2=BR^2+BP^2-2\cdot BR\cdot BP\cdot\cos(\beta+60)=\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}ac\cos(\beta+60)$$

$$PQ^2=PC^2+QC^2-2\cdot PC\cdot QC\cdot\cos(\gamma+60)=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}b^2-\frac{2}{3}ab\cos(\gamma+60)$$

Le tre formule nel triangolo danno lo stesso valore.
Trasformiamo, ad esempio, la prima nella seconda (si è omesso il coefficiente $\frac{1}{3}$).

$$c^2+b^2-2bc\cos(\alpha+60)=c^2+b^2-2bc(\cos\alpha\cos60-\sin\alpha\sin60)=$$
$$=c^2+b^2-bc\cos\alpha+\sqrt{3}bc\sin\alpha=c^2+a^2+c^2-2ac\cos\beta-c(c-a\cos\beta)+\sqrt{3}ac\sin\beta==c^2+a^2-ac\cos\beta+\sqrt{3}ac\sin\beta=c^2+a^2-2ac\cos($$

Si è usato

il teorema di Carnot $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

e le identità nel triangolo

$b\sin\alpha=a\sin\beta$

$b\cos\alpha+a\cos\beta=c$

