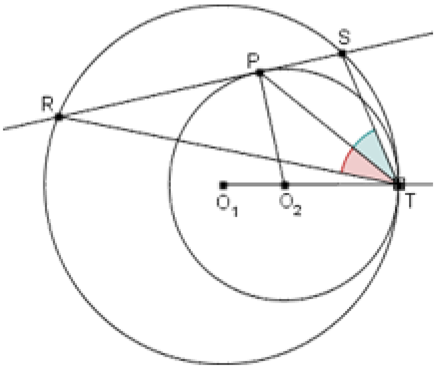
ESERCITAZIONI

Il problema della settimana /

Lista dei problemi

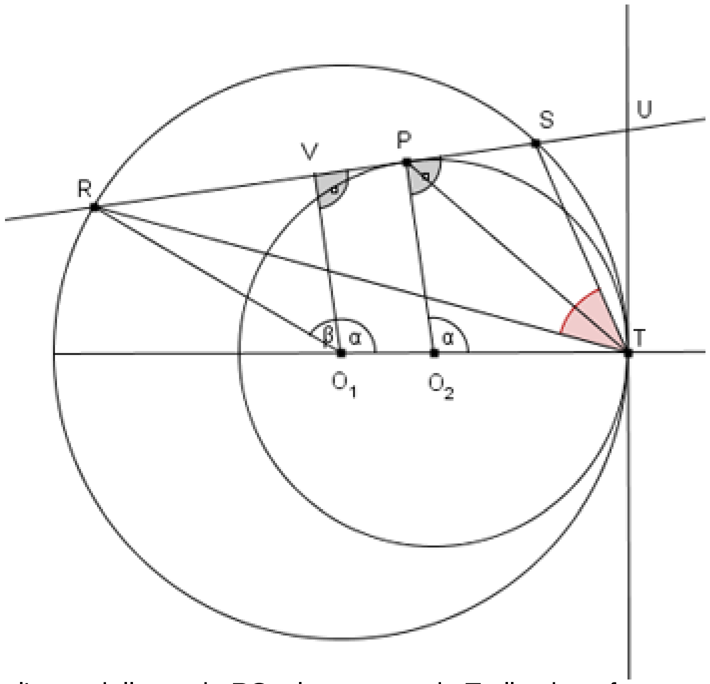
1.



Due circonferenze sono tangenti internamente in T.
Una retta è tangente in P alla circonferenza interna ed interseca quella esterna nei punti R e S.
Dimostrare che TP è bisettrice dell'angolo RTS.

Tratto da: BRITISH MATHEMATICAL OLYMPIAD
Round 1 : Wednesday 13th January 1993 problema 4

Risoluzione



Tracciamo l'asse della corda RS e la tangente in T alle circonferenze.

Poniamo $P\widehat{O_2}T = V\widehat{O_1}T = \alpha$ e $R\widehat{O_1}V = \beta$

Si ha:
$O_1\widehat{R}T = O_1\widehat{T}R = 90 - \frac{\alpha+\beta}{2}$
(differenza angoli nel triangolo isoscele RO_1T)

$S\widehat{R}T = 180 - R\widehat{V}O_1 - V\widehat{O_1}R - R\widehat{O_1}V = ... = \frac{\alpha-\beta}{2}$
(differenza angoli nel triangolo rettangolo RO_1V)

$S\widehat{T}U = S\widehat{R}T = \frac{\alpha-\beta}{2}$
(angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco TS)

$O_2\widehat{T}P = 90 - \frac{\alpha}{2}$ (differenza angoli nel triangolo isoscele PO_2T)

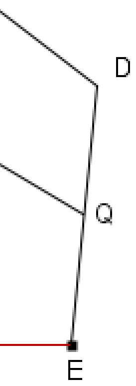
Quindi, per differenza:
$P\widehat{T}R = O_2\widehat{T}P - O_2\widehat{T}R = 90 - \frac{\alpha}{2} - 90 + \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$

E, infine, sempre per differenza:
$P\widehat{T}S = O_2\widehat{T}U - S\widehat{T}U - P\widehat{T}R = ... = \frac{\beta}{2}$

E quindi si ottiene la tesi.

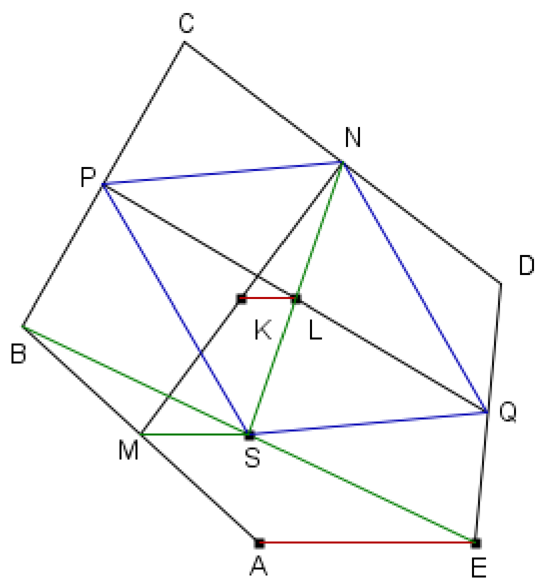
2.

Sia ABCDE un pentagono convesso e M, P, N e Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DE



rispettivamente. Se K e L sono i punti medi di MN e PQ ed il segmento AE è di lunghezza *a*, trova la lunghezza del segmento KL.

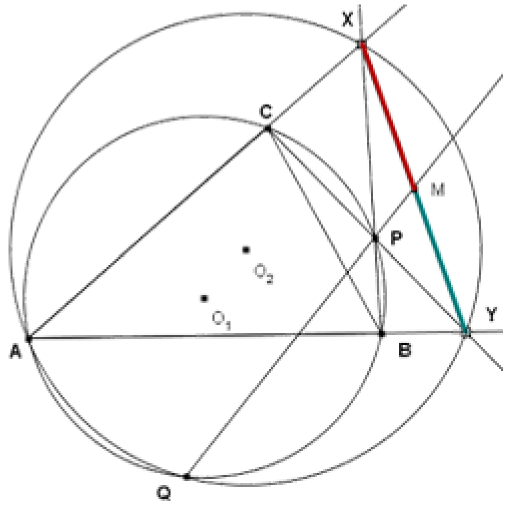
Tratto da: [IMO Bulgaria](#)
Winter Mathematical Competition 1995 Problema 2
Risposta



Tracciamo EB e sia S il suo punto medio.
Il quadrilatero PNQS è un parallelogramma (conseguenza del teorema di Talete) e NS ne è una diagonale, che quindi passa per il punto medio L dell'altra diagonale, PQ.
Nel triangolo MSN, KL ha estremi i punti medi di due lati. Perciò $KL=\frac{1}{2}MS$.
Nel triangolo AEB, MS ha estremi i punti medi di due lati. Perciò $MS=\frac{1}{2}AE$.
Di conseguenza $KL=\frac{1}{4}AE=\frac{1}{4}a$.

Altre soluzioni:
[soluzione con i vettori](#)
[soluzione con le coordinate](#)

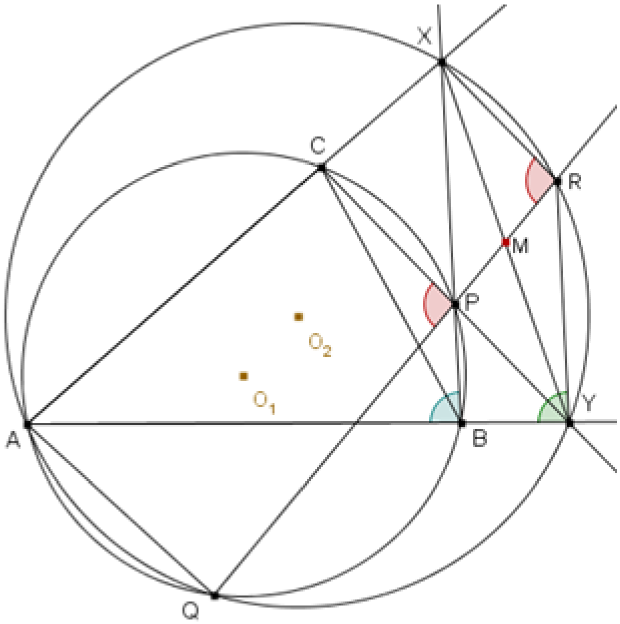
3.



Sia P un punto sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, diverso da A, B e C.
Supponiamo che BP intersechi AC in X e che CP intersechi AB in Y.
Sia Q il punto di intersezione delle circonferenze circoscritte ai triangoli ABC e AXY, con Q diverso da A.
Dimostra che PQ incontra il segmento XY nel punto medio di XY.
(I vari punti di intersezione possono stare sui prolungamenti dei segmenti)

Tratto da: [Da International Mathematical Talent Search - Round 10]

Risoluzione



Prolungare QP fino ad incontrare la circonferenza circoscritta ad AXY in R.

Si dimostra che PYRX è un parallelogramma, e, di conseguenza, la tesi segue dal fatto che M è il punto di intersezione delle sue diagonali.

Se consideriamo i quadrilateri AQPC e AQRX inscritti nelle circonferenze, essi hanno gli angoli opposti supplementari; quindi gli angoli nei vertici P ed R sono congruenti in quanto entrambi supplementari all'angolo nel vertice A.
Di conseguenza, sono parallele le rette PY e XR.

Nella circonferenza circoscritta a ABC si che $A\widehat{B}P \simeq A\widehat{Q}P$ perchè insistono entrambi sul medesimo arco AP.
Analogamente, nella circonferenza circoscritta a AXY si che $A\widehat{Y}R \simeq A\widehat{Q}R$ perchè insistono sul medesimo arco AR.
Ovviamente gli angoli in Q sono gli stessi e quindi $A\widehat{B}P \simeq A\widehat{Y}R$.
Quindi sono parallele le rette PX e YR.

