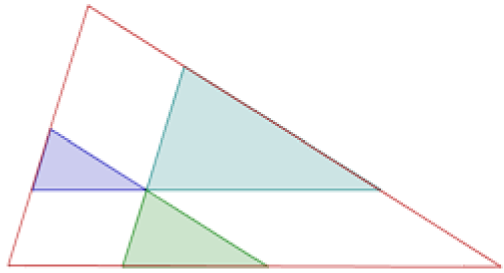
ESERCITAZIONI

Il problema della settimana /

Lista dei problemi

1.

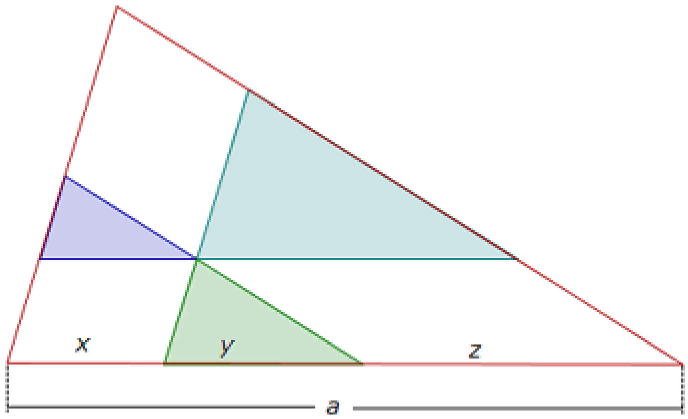


Da un punto interno ad un triangolo di area *T* si tracciano le parallele ai lati, che suddividono il triangolo in tre triangoli e tre parallelogrammi.
Dette T_1, T_2 e T_3 le aree dei triangoli, dimostrare che

$$\sqrt{T} = \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3}$$

Tratto da: Notes on Euclidean Geometry Kiran Kedlaya
1999
pag. 75 - problema indicato con: Sweden, 1996

Risoluzione



I tre triangoli sono simili al triangolo ABC.

Detti ρ_1, ρ_2 e ρ_3 i tre rapporti di similitudine, sappiamo che tra le aree valgono le relazioni

$$\frac{T_1}{T}=\rho_1^2\ ,\ \frac{T_2}{T}=\rho_2^2\ e\ \frac{T_3}{T}=\rho_3^2$$

da cui

$$\sqrt{\frac{T_1}{T}}=\rho_1\ ,\ \sqrt{\frac{T_2}{T}}=\rho_2\ e\ \sqrt{\frac{T_3}{T}}=\rho_3$$

$$\sqrt{T_1}=\rho_1\cdot\sqrt{T}\ ,\ \sqrt{T_2}=\rho_2\cdot\sqrt{T}\ e\ \sqrt{T_3}=\rho_3\cdot\sqrt{T}$$

e, sommando le uguaglianze

$$\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}+\sqrt{T_3}=\rho_1\cdot\sqrt{T}+\rho_2\cdot\sqrt{T}+\rho_3\cdot\sqrt{T}$$

e, infine,

$$\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}+\sqrt{T_3}=\left(\rho_1+\rho_2+\rho_3\right)\cdot\sqrt{T}$$

Resta da dimostrare che

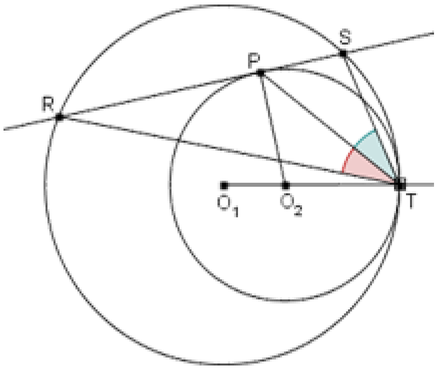
$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=1$$

Usando le misure in figura, si ha

$$\rho_1=\frac{x}{a}\ ,\ \rho_2=\frac{y}{a}\ e\ \rho_3=\frac{z}{a}$$

Quindi: $\rho_1+\rho_2+\rho_3=\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=\frac{x+y+z}{a}=1$

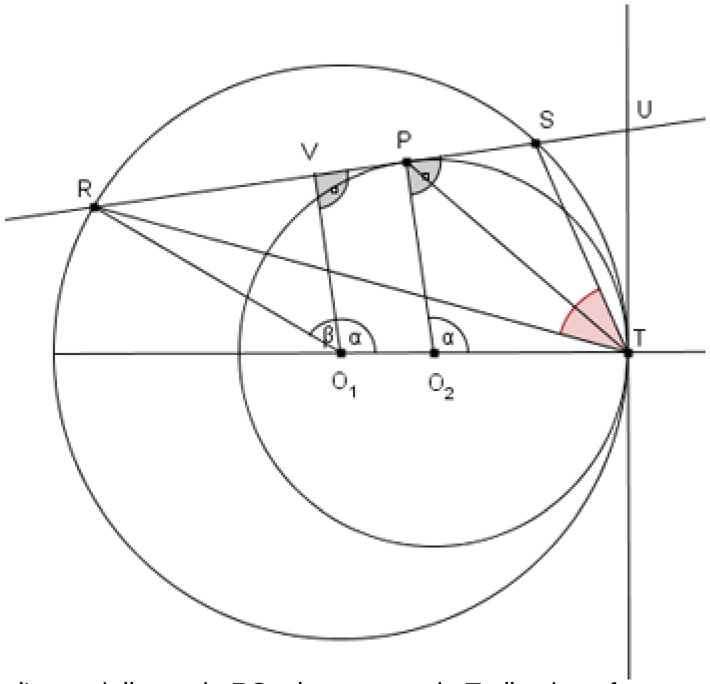
2.



Due circonferenze sono tangenti internamente in T.
Una retta è tangente in P alla circonferenza interna ed interseca quella esterna nei punti R e S.
Dimostrare che TP è bisettrice dell'angolo RTS.

Tratto da: BRITISH MATHEMATICAL OLYMPIAD
Round 1 : Wednesday 13th January 1993 problema 4

Risoluzione



Tracciamo l'asse della corda RS e la tangente in T alle circonferenze.

Poniamo $P\widehat{O_2}T = V\widehat{O_1}T = \alpha$ e $R\widehat{O_1}V = \beta$

Si ha:
$O_1\widehat{R}T = O_1\widehat{T}R = 90 - \frac{\alpha+\beta}{2}$
(differenza angoli nel triangolo isoscele RO_1T)

$S\widehat{R}T = 180 - R\widehat{V}O_1 - V\widehat{O_1}R - R\widehat{O_1}V = \ldots = \frac{\alpha-\beta}{2}$
(differenza angoli nel triangolo rettangolo RO_1V)

$S\widehat{T}U = S\widehat{R}T = \frac{\alpha-\beta}{2}$
(angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco TS)

$O_2\widehat{T}P = 90 - \frac{\alpha}{2}$ (differenza angoli nel triangolo isoscele PO_2T)

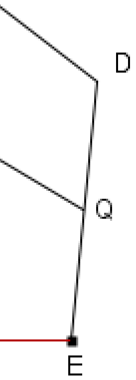
Quindi, per differenza:
$P\widehat{T}R = O_2\widehat{T}P - O_2\widehat{T}R = 90 - \frac{\alpha}{2} - 90 + \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$

E, infine, sempre per differenza:
$P\widehat{T}S = O_2\widehat{T}U - S\widehat{T}U - P\widehat{T}R = \ldots = \frac{\beta}{2}$

E quindi si ottiene la tesi.

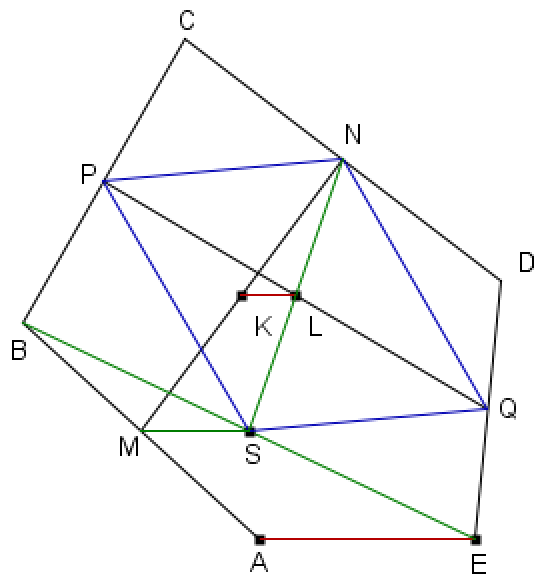
3.

Sia ABCDE un pentagono convesso e M, P, N e Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DE



rispettivamente. Se K e L sono i punti medi di MN e PQ ed il segmento AE è di lunghezza *a*, trova la lunghezza del segmento KL.

Tratto da: IMO Bulgaria
Winter Mathematical Competition 1995 Problema 2
Risposta



Tracciamo EB e sia S il suo punto medio.
Il quadrilatero PNQS è un parallelogramma (conseguenza del teorema di Talete) e NS ne è una diagonale, che quindi passa per il punto medio L dell'altra diagonale, PQ.
Nel triangolo MSN, KL ha estremi i punti medi di due lati. Perciò $KL=\frac{1}{2}MS$.
Nel triangolo AEB, MS ha estremi i punti medi di due lati. Perciò $MS=\frac{1}{2}AE$.
Di conseguenza $KL=\frac{1}{4}AE=\frac{1}{4}a$.

Altre soluzioni:
soluzione con i vettori
soluzione con le coordinate

