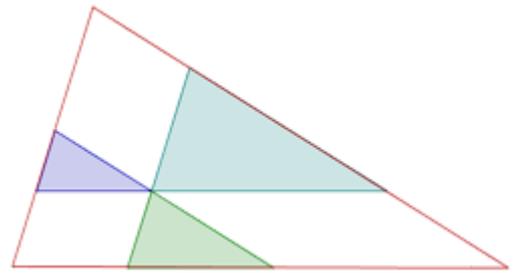


ESERCITAZIONI

Il problema della settimana /

Lista dei problemi

1.



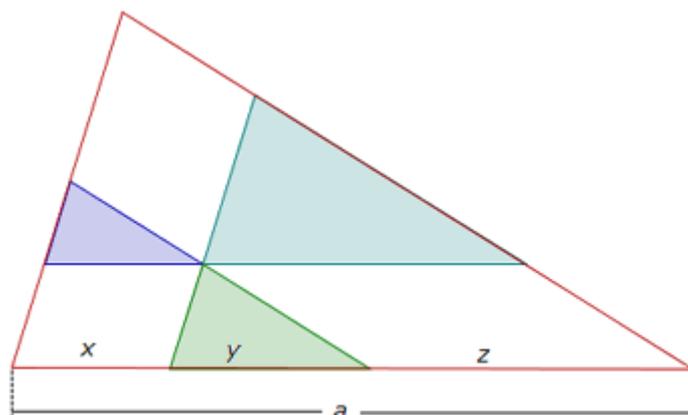
Da un punto interno ad un triangolo di area T si tracciano le parallele ai lati, che suddividono il triangolo in tre triangoli e tre parallelogrammi.

Dette T_1 , T_2 e T_3 le aree dei triangoli, dimostrare che

$$\sqrt{T} = \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3}$$

Tratto da: [Notes on Euclidean Geometry Kiran Kedlaya](#)
1999

pag. 75 - problema indicato con: Sweden, 1996



I tre triangoli sono simili al triangolo ABC.

Detti ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 i tre rapporti di similitudine, sappiamo che tra le aree valgono le relazioni

$$\frac{T_1}{T} = \rho_1^2, \quad \frac{T_2}{T} = \rho_2^2 \quad e \quad \frac{T_3}{T} = \rho_3^2$$

da cui

$$\sqrt{\frac{T_1}{T}} = \rho_1, \quad \sqrt{\frac{T_2}{T}} = \rho_2 \quad e \quad \sqrt{\frac{T_3}{T}} = \rho_3$$

$$\sqrt{T_1} = \rho_1 \cdot \sqrt{T}, \quad \sqrt{T_2} = \rho_2 \cdot \sqrt{T} \quad e \quad \sqrt{T_3} = \rho_3 \cdot \sqrt{T}$$

e, sommando le uguaglianze

$$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \rho_1 \cdot \sqrt{T} + \rho_2 \cdot \sqrt{T} + \rho_3 \cdot \sqrt{T}$$

e, infine,

$$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \cdot \sqrt{T}$$

Resta da dimostrare che

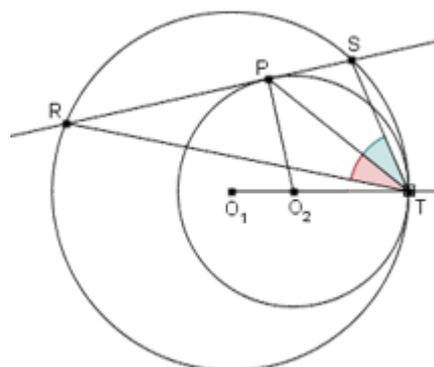
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1$$

Usando le misure in figura, si ha

$$\rho_1 = \frac{x}{a}, \quad \rho_2 = \frac{y}{a} \quad e \quad \rho_3 = \frac{z}{a}$$

Quindi:
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = \frac{x+y+z}{a} = 1$$

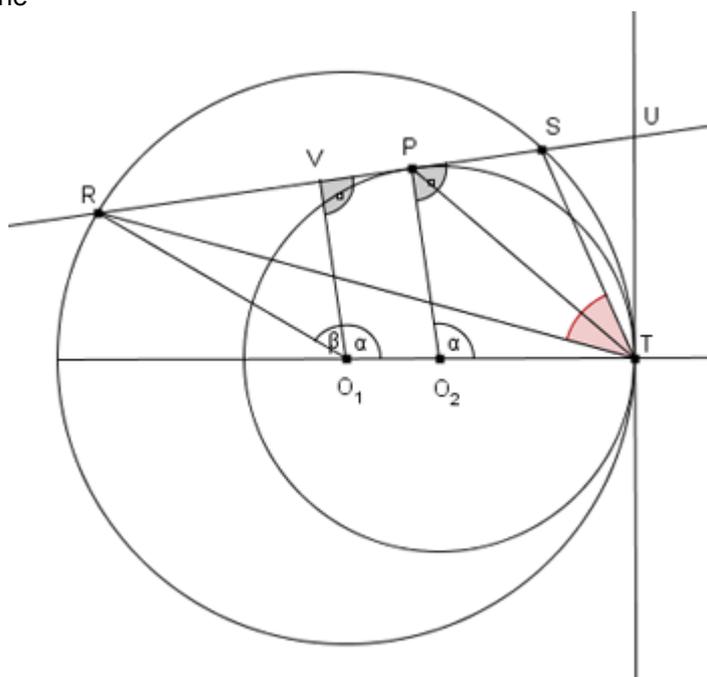
2.



Due circonferenze sono tangenti internamente in T .
Una retta è tangente in P alla circonferenza interna ed interseca quella esterna nei punti R e S .
Dimostrare che TP è bisettrice dell'angolo RTS .

Tratto da: [BRITISH MATHEMATICAL OLYMPIAD](#)
Round 1 : Wednesday 13th January 1993 problema 4

Risoluzione



Tracciamo l'asse della corda RS e la tangente in T alle circonferenze.

Poniamo $\widehat{PO_2T} = \widehat{VO_1T} = \alpha$ e $\widehat{RO_1V} = \beta$

Si ha:

$$\widehat{O_1RT} = \widehat{O_1TR} = 90 - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

(differenza angoli nel triangolo isoscele RO_1T)

$$\widehat{RST} = 180 - \widehat{RO_1V} - \widehat{VO_1R} - \widehat{RO_1V} = \dots = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

(differenza angoli nel triangolo rettangolo RO_1V)

$$\widehat{STU} = \widehat{RST} = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

(angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco TS)

$$\widehat{O_2TP} = 90 - \frac{\alpha}{2} \text{ (differenza angoli nel triangolo isoscele } PO_2T)$$

Quindi, per differenza:

$$\widehat{PTR} = \widehat{O_2TP} - \widehat{O_2TR} = 90 - \frac{\alpha}{2} - 90 + \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\beta}{2}$$

E, infine, sempre per differenza:

$$\widehat{PTS} = \widehat{O_2TU} - \widehat{STU} - \widehat{PTR} = \dots = \frac{\beta}{2}$$

E quindi si ottiene la tesi.

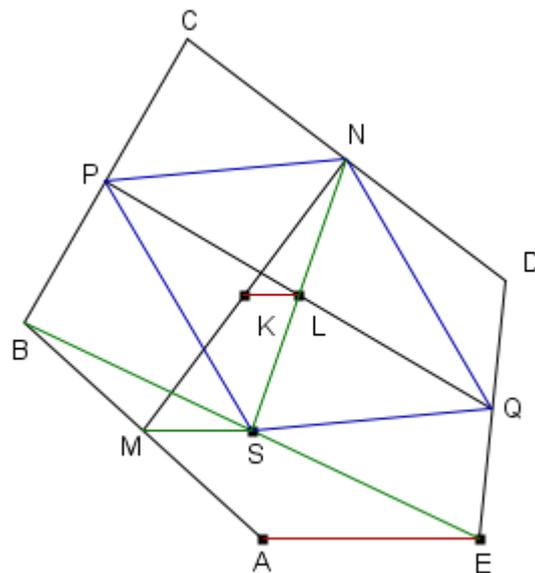
3.

Sia ABCDE un pentagono convesso e M, P, N e Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DE



rispettivamente. Se K e L sono i punti medi di MN e PQ ed il segmento AE è di lunghezza a, trova la lunghezza del segmento KL.

Tratto da: [IMO Bulgaria](#)
 Winter Mathematical Competition 1995 Problema 2
 Risposta



Tracciamo EB e sia S il suo punto medio.
 Il quadrilatero PNQS è un parallelogramma (conseguenza del teorema di Talete) e NS ne è una diagonale, che quindi passa per il punto medio L dell'altra diagonale, PQ.
 Nel triangolo MSN, KL ha estremi i punti medi di due lati. Perciò $KL = \frac{1}{2}MS$.
 Nel triangolo AEB, MS ha estremi i punti medi di due lati. Perciò $MS = \frac{1}{2}AE$.
 Di conseguenza $KL = \frac{1}{4}AE = \frac{1}{4}a$.

Altre soluzioni:
[soluzione con i vettori](#)
[soluzione con le coordinate](#)