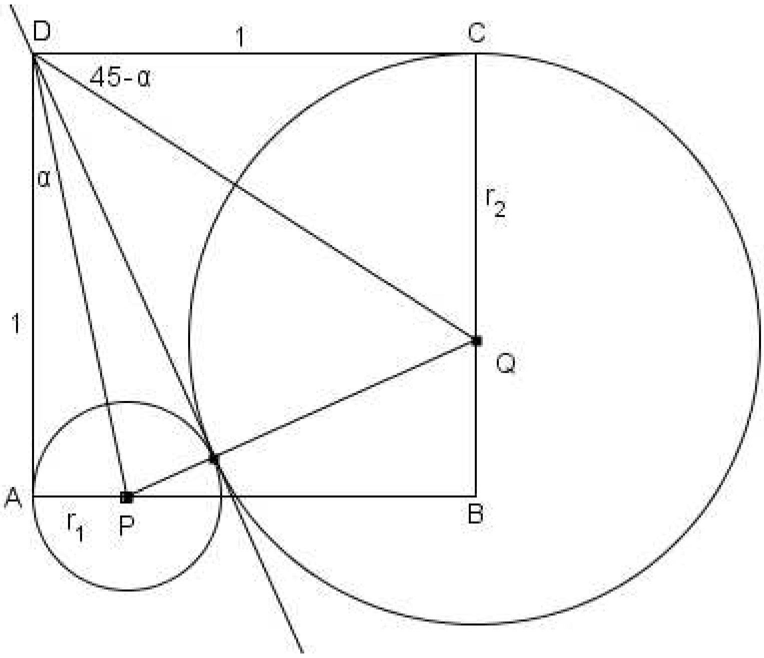
M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO
Indirizzo: SCIENTIFICO
Tema di: MATEMATICA
Problema 1, punto 1

Sia ABCD un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP.
Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se AP = x, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

Indichiamo con r_1 e r_2 i due raggi

UNA RISOLUZIONE TRIGONOMETRICA



a) La tangente comune passa per il vertice del quadrato: infatti le altre due tangenti sono i lati del quadrato

b) Gli angoli $A\hat{D}P$ e $C\hat{D}Q$ hanno per somma 45°: infatti la somma di due ciascuno di essi dà l'angolo retto D del quadrato

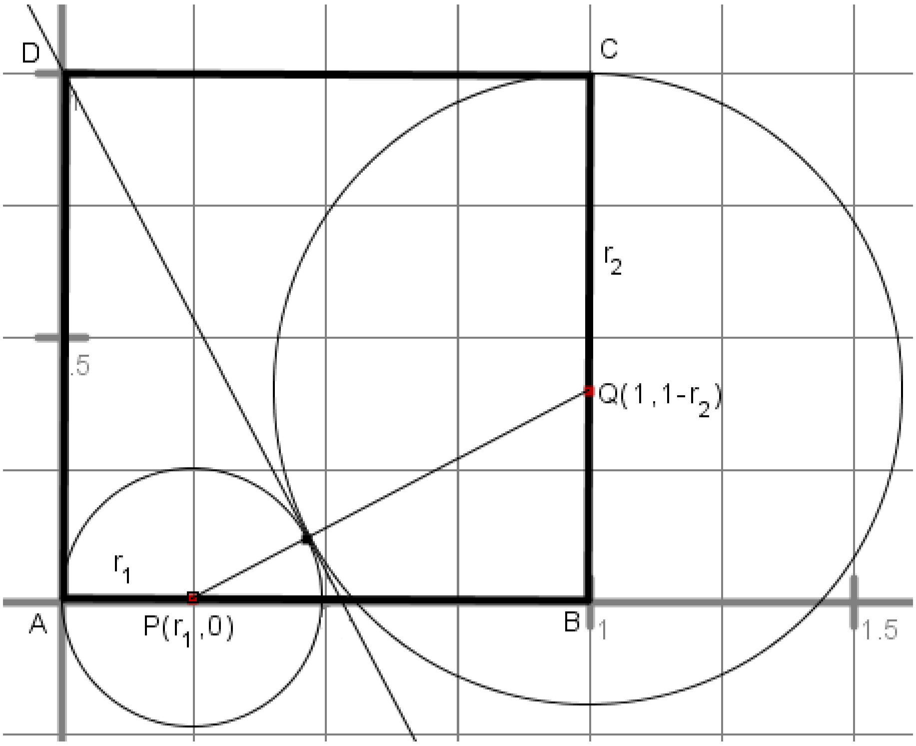
c) Nel triangolo rettangolo APD si ha $\dfrac{AP}{AD} = r_1 = \mathrm{tg}\alpha$

e nel triangolo rettangolo CQD si ha $\dfrac{CQ}{CD} = r_2 = \mathrm{tg}(45° - \alpha)$

d) Ma $\mathrm{tg}(45° - \alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}45° - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}45° \cdot \mathrm{tg}\alpha}$

e) Quindi $r_2 = \dfrac{1 - r_1}{1 + r_1}$

UNA RISOLUZIONE NEL PIANO CARTESIANO



Le coordinate sono quelle di figura.

a) L'equazione della circonferenza di centro P e raggio r_1

$$(x-r_1)^2+y^2=r_1^2 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2-2xr_1=0$$

b) L'equazione della circonferenza di centro Q e raggio r_2

$$(x-1)^2+(y-1+r_2)^2=r_2^2 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2-2x-2y(1-r_2)+2-2r_2=0$$

c) Sottraendo le equazioni si trova l'*asse radicale* (la tangente comune)

$$-2xr_1+2x+2y(1-r_2)-2+2r_2=0 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1-r_1}{1-r_2}x+1$$

Al che si ottiene che tale retta passa per il vertice D(0,1)del quadrato.

Per facilitare il calcolo, poniamo, momentaneamente, $m=-\frac{1-r_1}{1-r_2} \quad \rightarrow \quad y=mx+1$

d) Sostituiamo nella prima equazione per trovare l'ascissa dei punti di intersezione.

$$x^2+(mx+1)^2-2xr_1=0 \quad \rightarrow \quad (m^2+1)x^2-2x(r_1-m)+1=0$$

Imponiamo la condizione di tangenza

$$\frac{\Delta}{4}=(r_1-m)^2-(m^2+1)=0 \quad \rightarrow \quad r_1^2-2mr_1-1=0$$

Poiché dobbiamo ricavare r_2 in funzione di r_1, risostituiamo $m=-\frac{1-r_1}{1-r_2}$

$$r_1^2+2\frac{1-r_1}{1-r_2}r_1-1=0 \quad \rightarrow \quad (r_1-1)(r_1+1)-2\frac{r_1-1}{1-r_2}r_1=0$$

Procediamo fattorizzando

$$(r_1 - 1)\left[r_1 + 1 - \frac{2r_1}{1 - r_2}\right] = 0$$

Il primo fattore non può essere nullo.

Quindi

$$r_1 + 1 - \frac{2r_1}{1 - r_2} = 0 \qquad r_1 + 1 = \frac{2r_1}{1 - r_2}$$

$$(r_1 + 1)(r_2 - 1) = -2r_1 \qquad \rightarrow \qquad r_2 - 1 = -\frac{2r_1}{r_1 + 1}$$

$$r_2 = 1 - \frac{2r_1}{r_1 + 1}$$

Infine $r_2 = \dfrac{1 - r_1}{1 + r_1}$