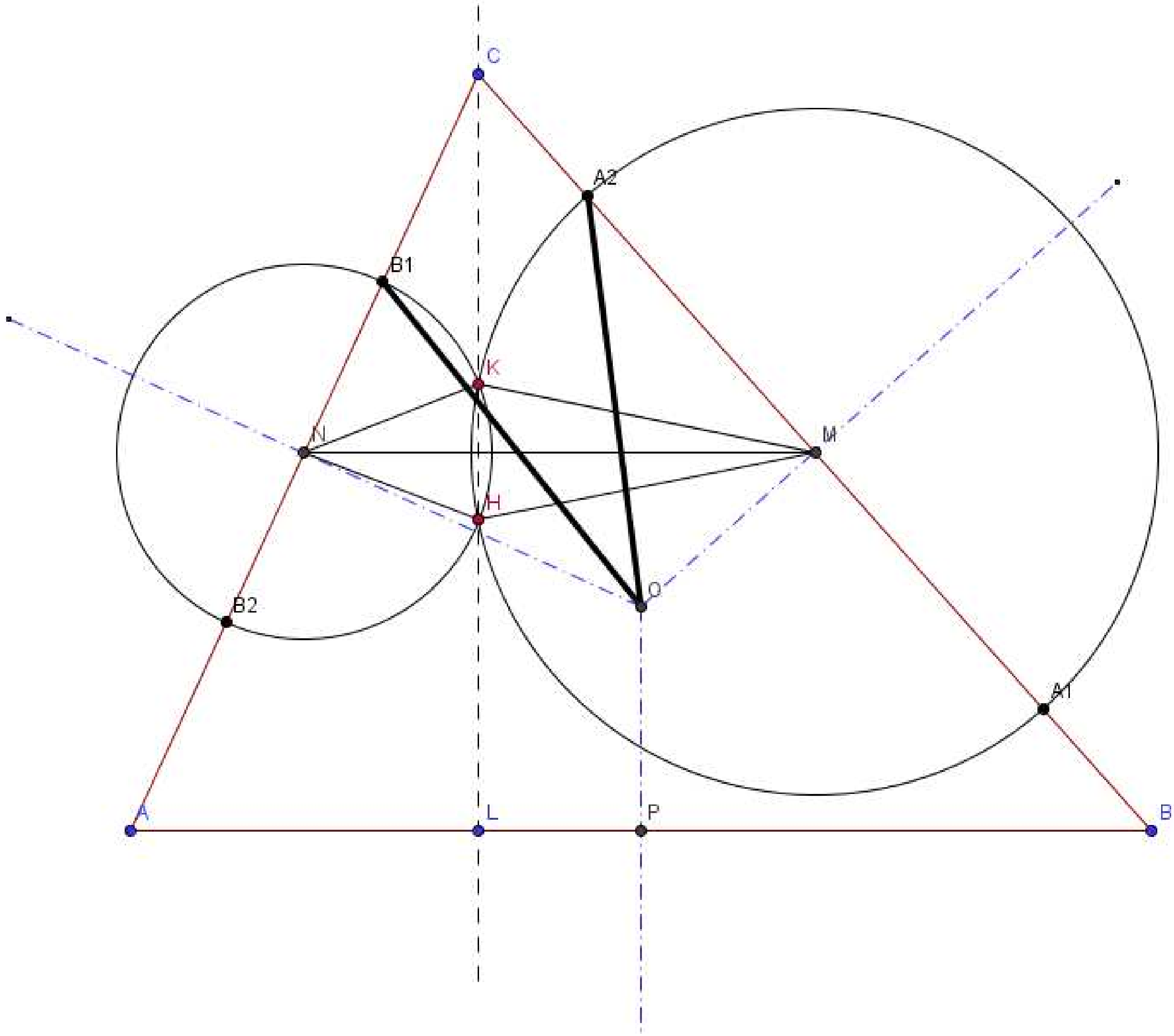
Problema

Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H. La circonferenza con centro il punto medio di BC e passante per H interseca la retta BC in A_1 e A_2. Analogamente, la circonferenza con centro il punto medio di CA e passante per H interseca la retta CA in B_1 e B_2, e la circonferenza con centro il punto medio di AB e passante per H interseca la retta AB in C_1 e C_2. Dimostrare che A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 giacciono su una medesima circonferenza.

Tratto da http://www.imo-2008.es/examenes/ita.pdf

Soluzione



Osserviamo che se esiste questa circonferenza allora è concentrica a quella circoscritta: il suo centro deve stare sugli assi dei lati di ABC, perché deve essere equidistante da A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 (NB: le tre circonferenze per H con i centri nei punti medi dei lati di ABC hanno i diametri inclusi nelle rette contenenti i rispettivi lati di ABC …).

Ci concentriamo sulle circonferenze per HA_1A_2 e HB_1B_2 per dimostrare che, detto O il circocentro del triangolo ABC (in figura in blu sono disegnati gli assi di ABC), risulta $OA_2=OB_1$ (ovviamente OA_1=OA” e OB_1=OB2). Lo stesso ragionamento si potrebbe fare per dimostrare che $OA_1=OC_1$

(vedere la figura successiva) e, in definitiva, $OA_1=OA_2=OB_1=OB_2=OC_1=OC_2$; per cui c'è una circonferenza, concentrica con quella circoscritta, che passa per i punti A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2.

Le due circonferenze disegnate si intersecano in due punti K e H: in H per costruzione, in K perché il quadrilatero HMKN (M, N punti medi di CA e BC rispettivamente) ha le diagonali perpendicolari perché HN=KN e HM=KM per costruzione, per cui H appartiene all'altezza CL che è perpendicolare alla base AB la quale è parallela al segmento NM che unisce i punti medi suddetti.

Per il teorema delle secanti applicato alle rette CA, CB e CL si ha: $CB_1*CB_2=CK*CH=CA_2*CA_1$.
Per semplicità introduciamo le notazioni seguenti:

$BC=a$, $CA=b$, $CA_2=x$, $CB_1=y$; risulta allora $B1N=(b-y)/2$, $A_2M=(a-x)/2$.

Indichiamo inoltre con R il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC. Dalla precedente figura si ha:

teorema secanti applicato alle rette CA, CB e CL:

$$y(b-y)=x(a-x), \text{ ovvero } x^2-y^2=ax-by \qquad (o)$$

teorema di Pitagora applicato ai triangoli OMA2 e OMC:

$$OA_2{}^2=A_2M^2+OM^2= A2M^2+(OC^2-CM^2)=((a-2x)/2)^2+R^2-(a/2)^2$$

Teorema di Pitagora applicato ai triangoli ONB1 e ONC:

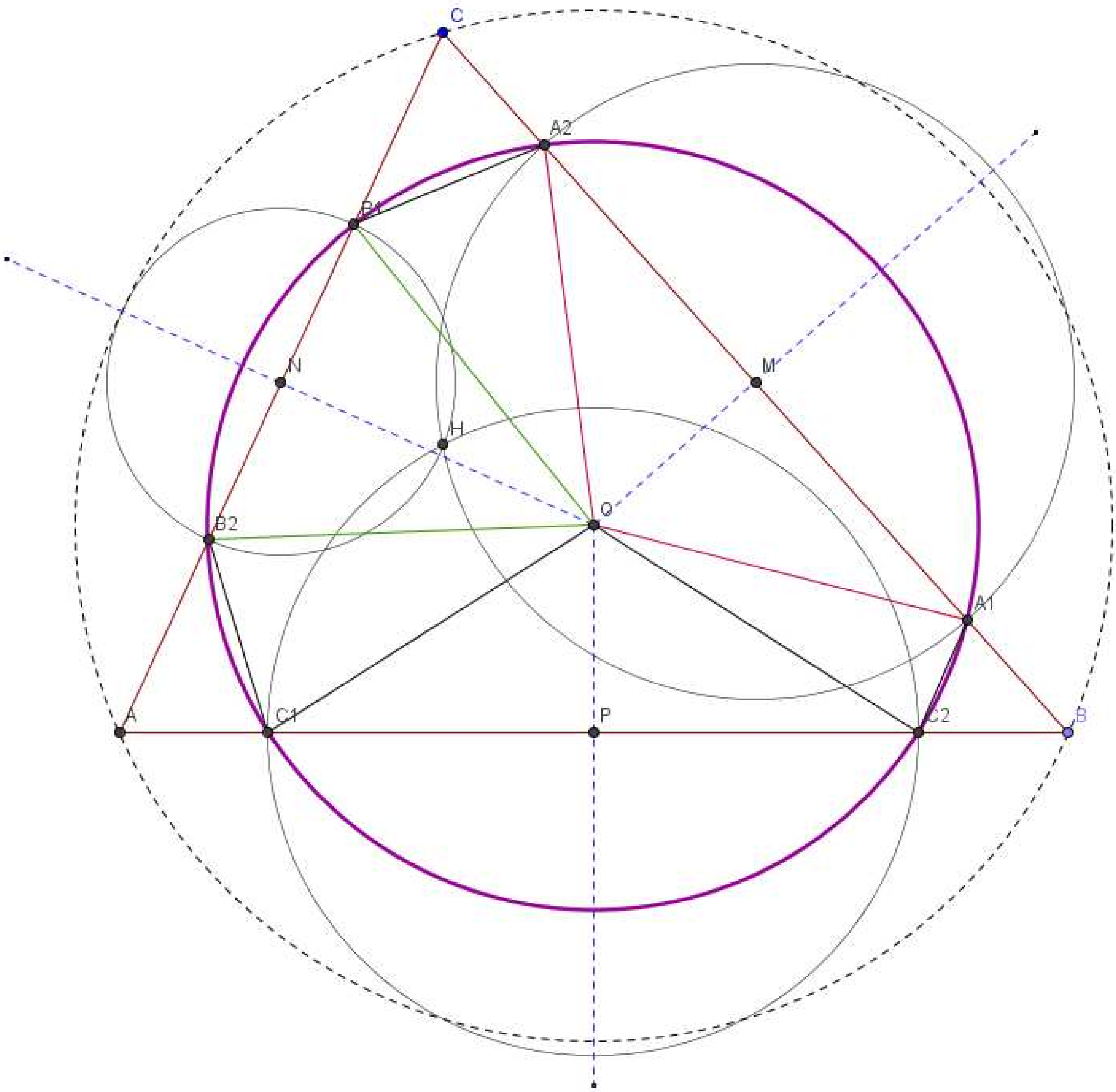
$$OB_1{}^2=B_1N^2+ON^2= B_1N^2+(OC^2-CN^2)=((b-2x)/2)^2+R^2-(b/2)^2$$

Adesso basta sottrarre i quadrati ottenuti:

$$OA_2{}^2-OB_1{}^2=((a-2x)/2)^2+R^2-(a/2)^2-((b-2x)/2)^2-R^2+(b/2)^2=x^2-y^2-(ax-by)=0 \qquad \text{per la (o).}$$

Come detto prima si può rifare lo stesso ragionamento per dimostrare, per esempio, che $OA_1=OC_2$ (vedere la figura successiva), arrivando al risultato voluto.

Nella figura seguente sono mostrate le cinque circonferenze coinvolte:



C
A2
B1
N
M
H
O
B2
A1
A
C1
P
C2
B