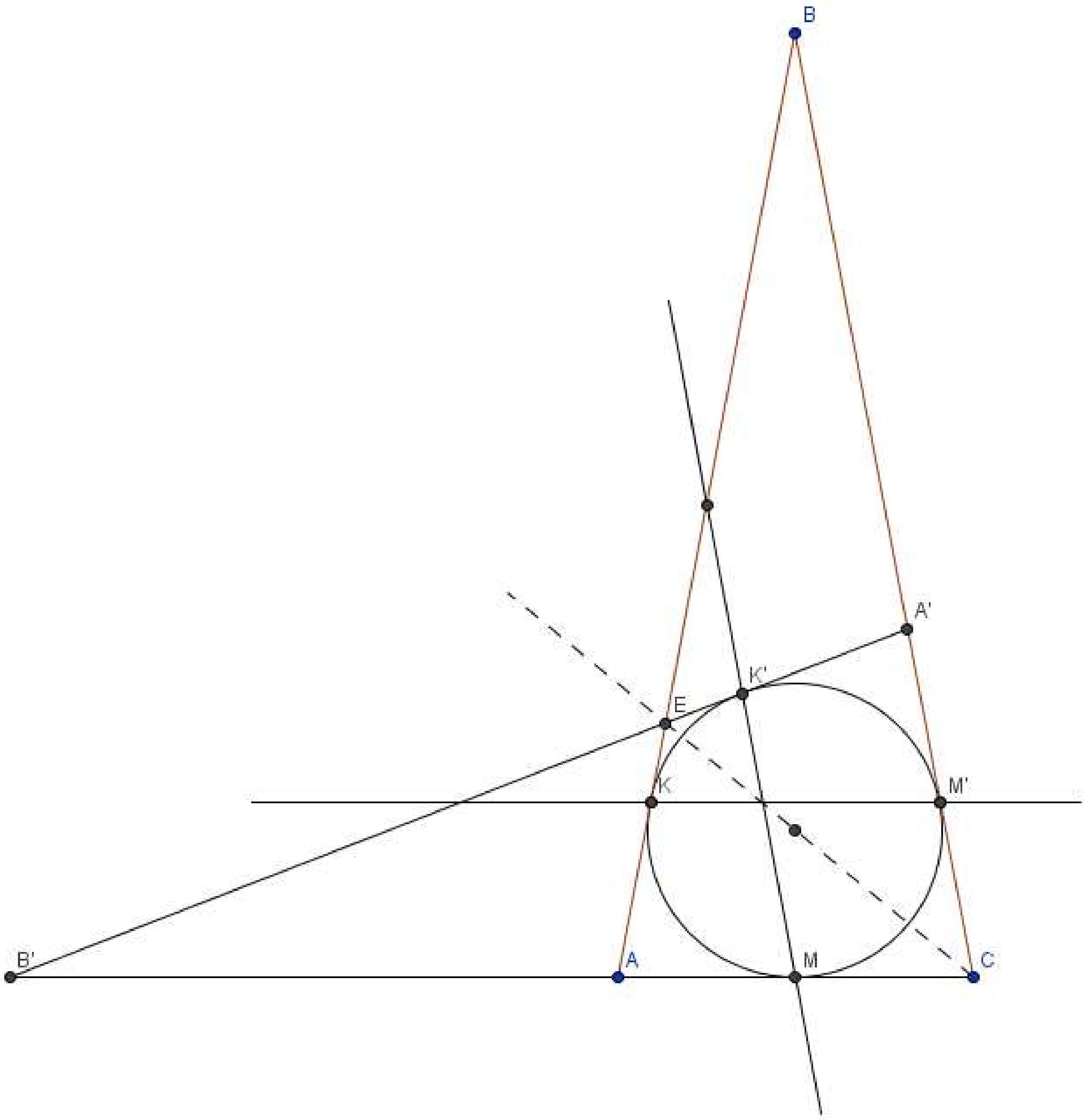
Problema
In un triangolo ABC con AB = BC la retta parallela al lato BC e passante per il punto medio di AB interseca la circonferenza inscritta nel punto medio di AC e in un altro punto F. Dimostrare che la tangente in F alla circonferenza inscritta e la bisettrice dell'angolo C si intersecano nello stesso punto del lato AB.

Tratto da: [9-th All-Russian Mathematical Olympiad 2003] Fourth Round - Grade 9 - Problema 3

Soluzione



Sia E l’intersezione della bisettrice dell’angolo ACB con il segmento AB. Si esegua una riflessione della figura rispetto alla retta (bisettrice) CE. Si ottiene allora che:

- la circonferenza inscritta in ABC si trasforma in se stessa in quanto la retta di simmetria passa per un diametro essendo la bisettrice dell’angolo ACB e contenendo, quindi, il centro della detta circonferenza;
- il punto B si trasforma nel punto B’ appartenente alla retta AC;
- il punto A si trasforma nel punto A’ appartenente alla retta BC;
- il punto E, appartenendo alla retta CE, è invariante e quindi rimane nella sua posizione;
- il punto K di tangenza al lato AB della circonferenza inscritta si trasforma in K’ che deve essere di tangenza a A’B’
- il punto M si trasforma in M’, medio di CA’;
- la retta K’M si trasforma nella retta KM’.

Poiché KM’∥AC in quanto AK=CM’ (ABC è isoscele ed M’, K e M sono punti di tangenza della circonferenza), risulterà anche K’M∥CB, quindi K’M essendo parallela a CB e passante per il punto medio M di AC dovrà coincidere con la retta del testo, quindi F coinciderà con K’, cioè con il punto in cui A’B’ è tangente alla circonferenza.