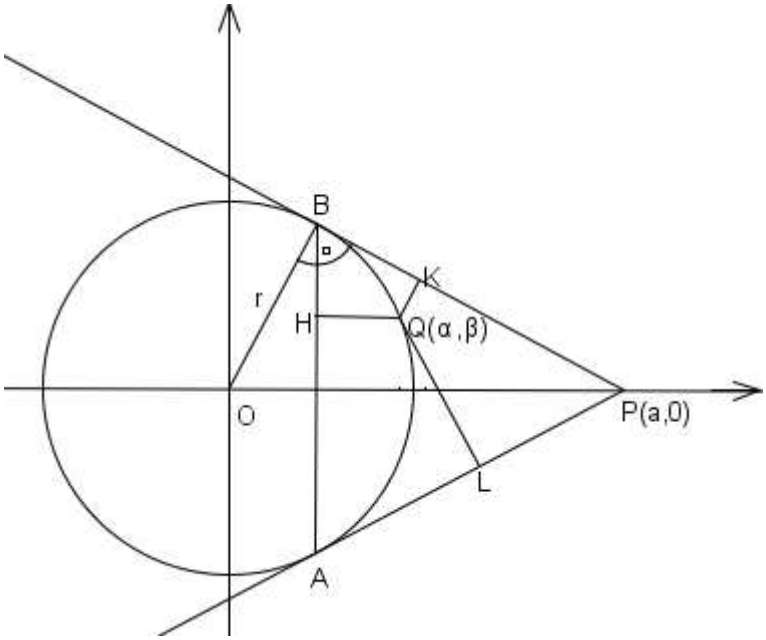
Da un punto esterno P si tracciano le tangenti PA e PB ad una circonferenza. Da un punto Q dell'arco AB (il maggiore o il minore) si tracciano le perpendicolari alle tangenti ed alla corda AB.
Dimostrare che la distanza di Q dalla corda AB è media proporzionale tra le distanze di Q dalle tangenti.
Posamentier,Salkind: Challenging Problems in Geometry (problema 4.3 pag15)



Dimostrazione analitica
Prendiamo come origine del riferimento cartesiano il centro O della circonferenza ed il punto P sull'asse x.

L'equazione della circonferenza è
$x^2 + y^2 = r^2$
L'equazione del fascio di rette centro P
$y = m(x - a)$

I coefficienti angolari delle rette tangenti si ottengono imponendo la distanza delle rette del fascio dal centro della circonferenza (l'origine) uguale al raggio della circonferenza:

$$\frac{|ma|}{\sqrt{1+m^2}} = r^2$$

da cui $m_{1,2} = \pm \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$

L'ascissa di A e di B è $\frac{r^2}{a}$ (si può usare il Teorema di Euclide al triangolo rettangolo OBP)

Quindi PA e PB hanno equazione, rispettivamente,

$y = m_1(x - a)$ $\qquad$ $y = m_2(x - a)$

$Q(\alpha, \beta)$ appartiene alla circonferenza. Quindi $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$

Le distanze di $Q(\alpha, \beta)$ da AB, da PA e da PB sono espresse da

$$QH = \left|\alpha - \frac{r^2}{a}\right| \qquad QL = \frac{|\beta - m_1(\alpha - a)|}{\sqrt{1+m_1^2}} \qquad QK = \frac{|\beta - m_2(\alpha - a)|}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

Notiamo che QH ha la stessa espressione indipendentemente dall'arco AB cui appartiene Q.
Si ha

(*) $$QL \cdot QK = \frac{|\beta - m_1(\alpha - a)|}{\sqrt{1+m_1^2}} \frac{|\beta - m_2(\alpha - a)|}{\sqrt{1+m_2^2}} = \frac{\left|\beta^2 - (m_1 + m_2)(\alpha - a) + m_1 m_2 (\alpha - a)^2\right|}{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$$

Si ha che $m_1 + m_2 = 0$, $\qquad m_1 \cdot m_2 = -\frac{r^2}{a^2 - r^2}$

Inoltre $\beta^2 = r^2 - \alpha^2$

Il numeratore della frazione in (*) si semplifica in $\left| r^2 - \alpha^2 - \frac{r^2}{a^2 - r^2}(\alpha - a)^2 \right| = \ldots = \left| -\frac{\left(r^2 - \alpha a\right)^2}{a^2 - r^2} \right|$

Poiché $m_1{}^2 = m_2{}^2 = \frac{r^2}{a^2 - r^2}$ allora il denominatore della (*) risulta $\frac{a^2}{a^2 - r^2}$

Infine si ottiene $QL \cdot QK = \frac{\left(r^2 - \alpha a\right)^2}{a^2 - r^2} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2} = \frac{\left(r^2 - \alpha a\right)^2}{a^2}$

Ma anche $QH^2 = \frac{\left(r^2 - \alpha a\right)^2}{a^2}$.

Quindi $QH^2 = QL \cdot QK$