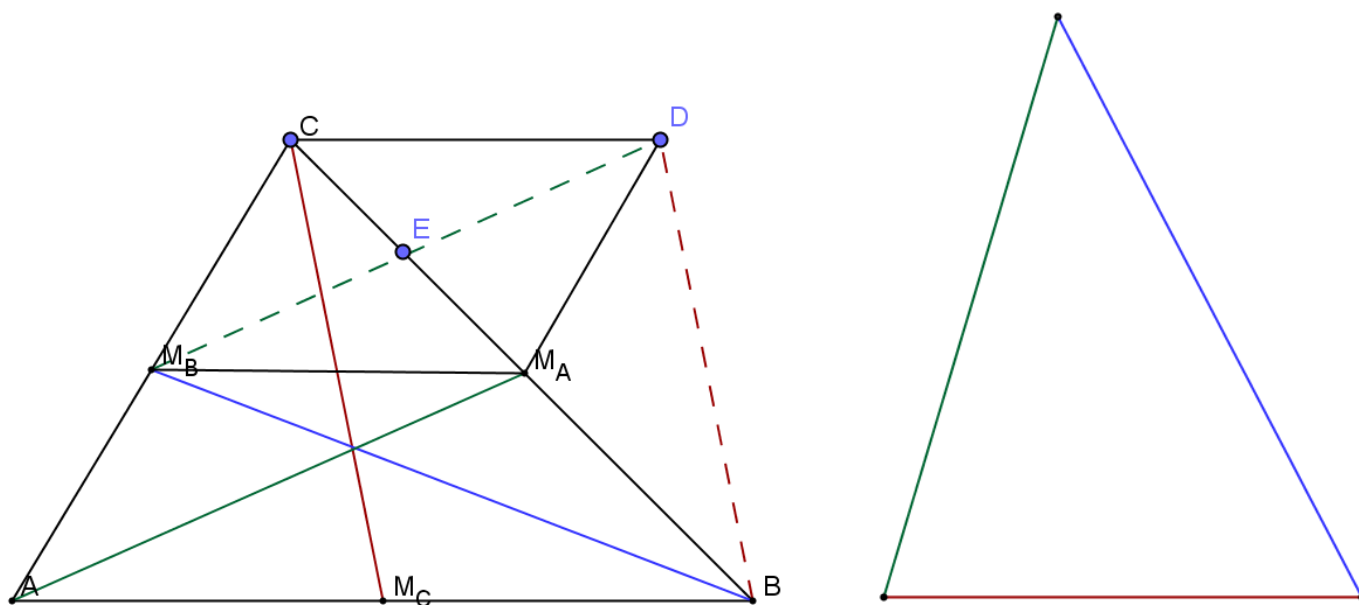


Problema.

Sia ABC un triangolo e M_A , M_B e M_C i punti medi dei lati BC , CA e AB , rispettivamente. Dimostrare che il triangolo con i lati lunghi AM_A , BM_B e CM_C ha area $3/4$ dell'area del triangolo ABC .

Tratto da: [Notes on Euclidean Geometry Kiran Kedlaya](#) 1999

Problemi della sezione 1.1, n.2 - pag.1

Soluzione.

La soluzione è costituita da due parti:

- nella prima si costruisce, a partire dal triangolo ABC , il triangolo BDM_B e si dimostra che ha i lati congruenti alle mediane di ABC ;
- nella seconda si mostra l'equivalenza cercata.

Nel seguito non si starà a dire, ma si terrà sempre in considerazione, il fatto che M_A , M_B e M_C sono punti medi dei segmenti BC , CA e AB rispettivamente.

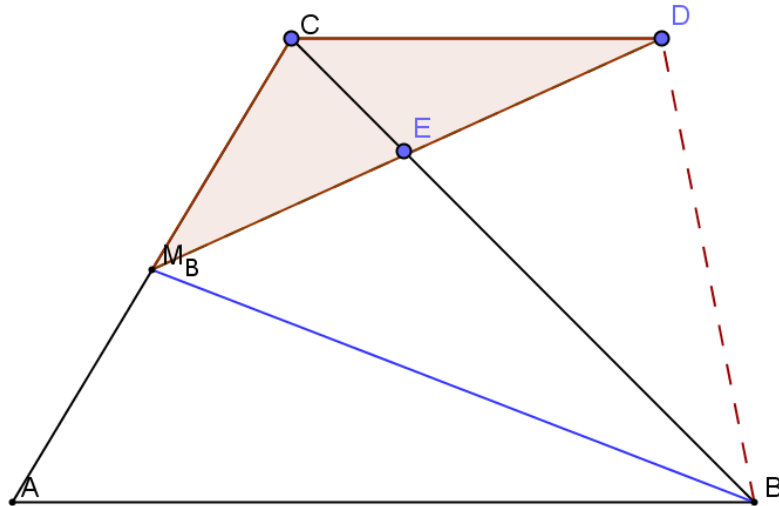
Prima parte

Per costruire il triangolo BDM_B si tracci la parallela per B alla mediana CM_C e la parallela per C al lato AB . Si individua così il parallelogramma $M_C B D C$ (quindi i lati opposti $M_C C$ e BD sono congruenti). Unendo M_B con D si forma il triangolo BDM_B . Questo triangolo è quello cercato, infatti ha il lato $M_B D$ congruente alla mediana $M_A A$ del triangolo ABC (quindi, essendo il terzo lato di BDM_B coincidente con la mediana $M_B B$, si tratta proprio del triangolo cercato) in quanto il quadrilatero $AM_A D M_B$ è un parallelogramma perché ha la coppia di lati opposti $M_A D$ e $M_B A$ congruenti e paralleli:

- congruenti perché $M_A D = M_B C = M_B A$ perché $M_B M_A D C$ è un parallelogramma per costruzione ($M_B M_A \parallel AB \parallel CD$ (CD è stata tracciata parallela ad AB nella costruzione

- iniziale) e $M_B M_A = AB/2 = M_C B = DC$ perché per costruzione $M_C BDC$ è un parallelogrammo (BD è stata tracciata parallelamente a CM_C nella costruzione iniziale));
- paralleli perché essendo $M_B M_A DC$ un parallelogrammo si ha $M_A D \parallel M_B C$ e quindi essendo A, M_B e C collineari, $M_A D \parallel M_B A$.

Seconda parte



Il quadrilatero $M_B BDC$ è equivalente al triangolo ABC in quanto esso è equivalente alla somma dei triangoli $M_B BC$ e BDC che sono entrambi equivalenti a metà del triangolo ABC:

$$A(M_B BDC) = A(M_B BC) + A(BDC)$$

$A(M_B BC) = A(ABC)/2$ perché, relativamente alla retta AC i triangoli ABC e $M_B BC$ hanno la stessa altezza, ma $M_B C = CA/2$.

$A(BDC) = A(ABC)/2$ perché, relativamente alla retta AB (o DC) i triangoli ABC e BDC hanno la stessa altezza, ma $CD = AB/2$ (perché dimostrato nella prima parte).

Il triangolo $M_B DC$ è equivalente a $1/4$ del triangolo ABC, infatti ha, relativamente alla base CD, la quale è congruente alla metà di AB (nella figura iniziale si vede il parallelogrammo $M_C BDC$), l'altezza congruente a metà di quella di ABC:

$$A(M_B DC) = A(ABC)/4$$

Infine, per determinare l'area del triangolo BDM_B (avente, come dimostrato nella prima parte, i lati congruenti alle mediane del triangolo ABC) basta sottrarre:

$$A(BDM_B) = A(M_B BDC) - A(M_B DC) = A(ABC) - A(ABC)/4 = 3/4 A(ABC) \quad \text{CVD.}$$