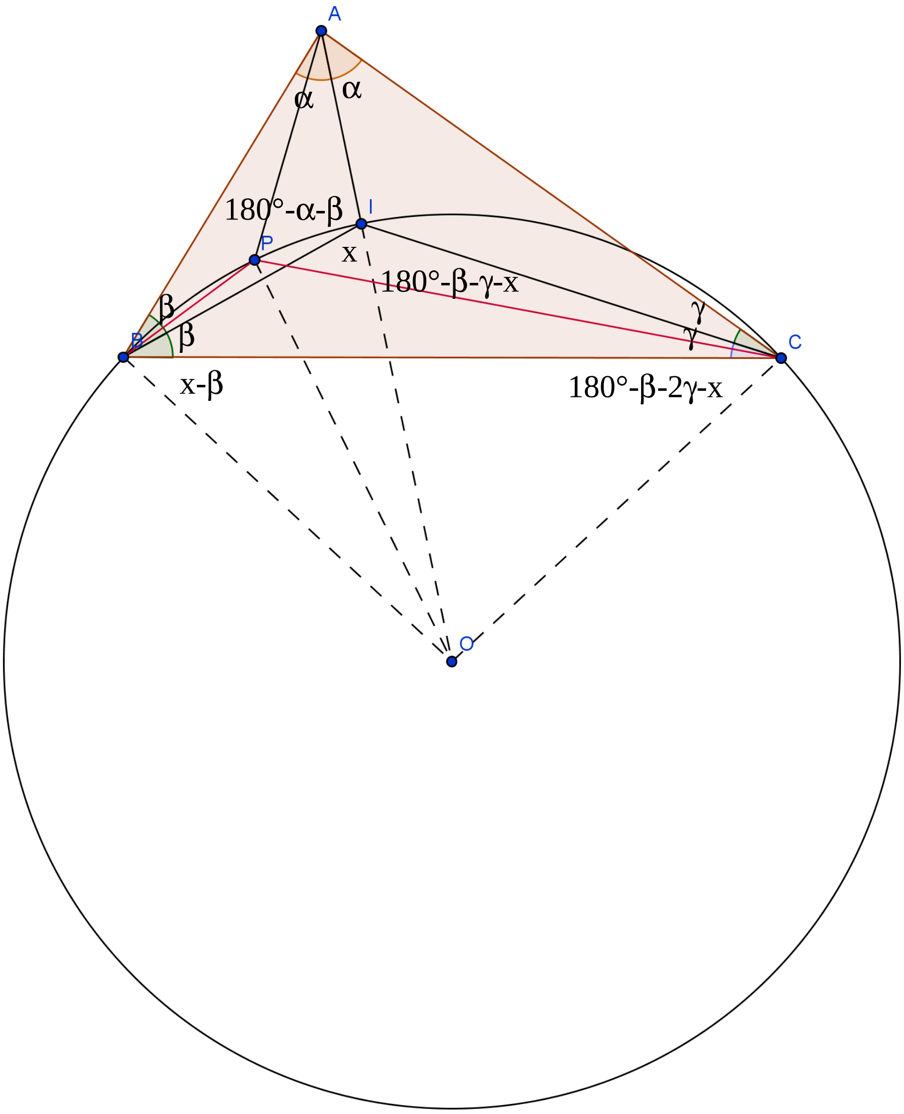
Problema
Sia ABC un triangolo e sia I il centro della sua circonferenza inscritta.
Sia P un punto interno al triangolo tale che

$$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B$$

Dimostrare che AP≥AI e che vale l'uguaglianza se e solo se P=I.

Tratto da: [International Mathematical Olympiad] 12 luglio 2006 - Problema 1

Soluzione 1



Indicando gli angoli in A, B e C rispettivamente con 2α, 2β e 2γ, congiungendo l'incentro I del triangolo ABC si vengono a formare gli angoli di ampiezze α, β, γ, come mostrato in figura.

Risulta ∠PBA+∠PBC=2β e ∠PCA+∠PCB=2γ. Sommando queste due relazioni si ottiene:

∠PBA+∠PBC+∠PCA+∠PCB=(∠PBA+∠PCA)+(∠PBC+∠PCB)=
=2(∠PBA+∠PCA)=2(∠PBC+∠PCB)=2γ+2β

da cui:

$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB=\gamma+\beta$

Dalla relazione $\angle PBC+\angle PCB=\gamma+\beta$ discende $\angle BPC=180°-\gamma-\beta$=costante al variare di P soddisfacente il vincolo

$$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B$$

Questo significa che P vede il segmento BC sotto l'angolo ($180°-\gamma-\beta$), quindi P appartiene all'unione di due particolari archi di circonferenza che hanno BC come corda. Poiché P è, per ipotesi, interno al triangolo ABC, in realtà P appartiene a uno solo di tali archi. L'arco in questione deve passare per l'incentro I, infatti $\angle BIC=180°-\gamma-\beta$.

Sia O il centro della circonferenza contenente il suddetto arco. Dimostriamo ora che I appartiene al segmento OA.
Poniamo $\angle BIO=x$.
Si ha (il triangolo OIB è isoscele) che $\angle OBC=x-\beta$;
$\angle OIC=180°-\beta-\gamma-x$ (perché $\angle OIC=\angle BIC-\angle BIO$);
$\angle OCB=\angle OCI-\angle BCI=180°-\beta-2\gamma-x$ (il triangolo OCI è isoscele).

Ma il triangolo OBC è isoscele per cui si ha: $\angle OBC=\angle OCB$, cioè $x-\beta=180°-\beta-2\gamma-x$,
da cui $x=90°-\gamma$.

Sommando gli angoli $\angle BIA$ (visto come terzo angolo del triangolo BIA di angoli di ampiezze α e β) e $\angle BIO$ si ottiene:

$\angle BIA+\angle BIO=(180°-\alpha-\beta)+x=(180°-\alpha-\beta)+(90°-\gamma)=270°-(\alpha+\beta+\gamma)=270°-90°=180°$

(si è usato il fatto che $2\alpha+2\beta+2\gamma=180°$)

così I, A ed O sono allineati (ovvero I appartiene al segmento AO).

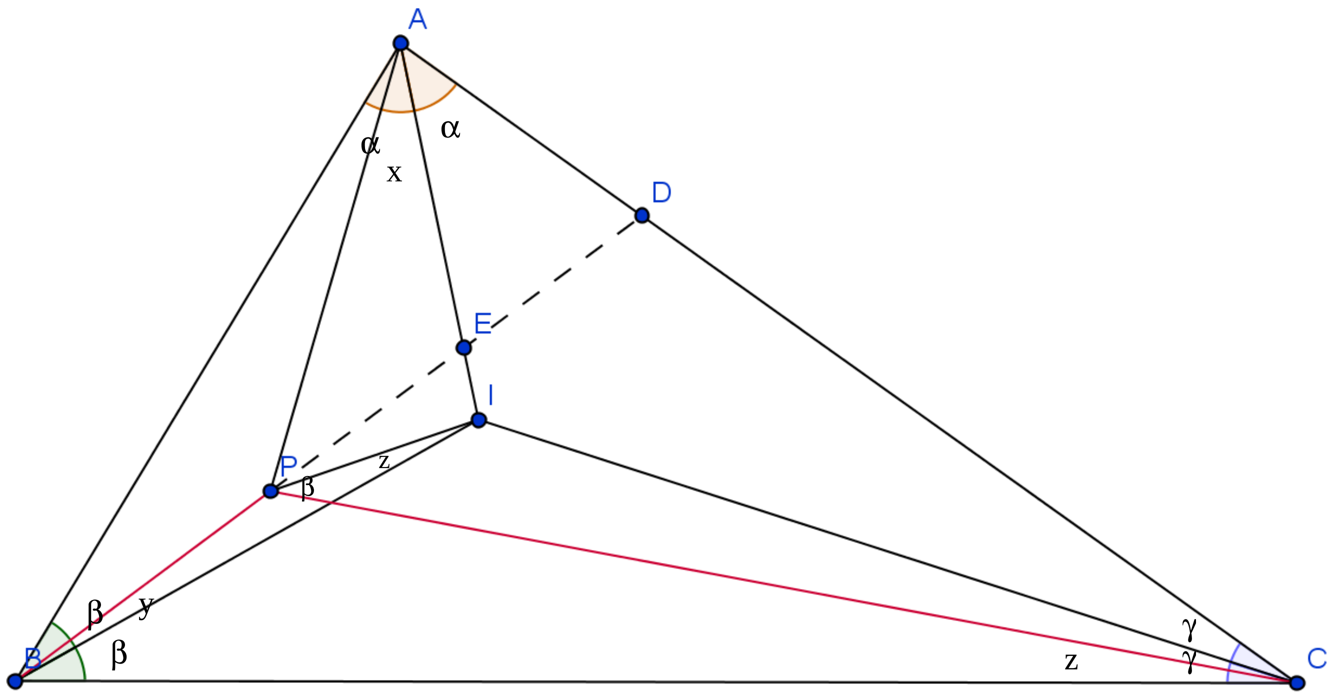
Dalla disuguaglianza triangolare $AP+PO\geq AO$ applicata al triangolo APO si ottiene:

$AP+PO\geq AO=AI+IO$

Ma IO=PO perché raggi; da cui $AP\geq AI$ (l'uguaglianza vale solo se P coincide con I nel qual caso il triangolo APO degenera nel segmento OA).

CVD

Soluzione 2



La soluzione si articola in due parti la prima delle quali è identica alla precedente. Nella seconda parte si determinano gli angoli ∠API e ∠AIP e si dimostra che ∠AIP ≥ ∠API; si conclude che, poiché in un triangolo (stiamo considerando il triangolo API) ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore, AP ≥ AI (se P=I si ha l'eguaglianza).

Prima parte (in breve, perché uguale alla prima parte della soluzione 1)

1) ∠PBA+∠PCA=∠PBC+∠PCB=γ+β

2) ∠BPC=180°-γ-β=costante al variare di P soddisfacente il vincolo

$$P\hat{B}A + P\hat{C}A = P\hat{B}C + P\hat{C}B\,.$$

Questo porta a dire che c'è una circonferenza che passa per i punti I, P, B e C, cioè che il quadrilatero BCIP è ciclico.

Seconda parte

Si prolunghi BP in BD.

Poniamo per brevità

∠PAI= x

∠PBC=y

∠PCB=z

Teniamo a mente le relazioni: α+β+γ=90° **(1)**

β+γ=y+z=90°-α **(2)**

Per determinare i due angoli da confrontare del triangolo AIP si useranno le relazioni seguenti:

∠AIP=∠AIB-∠PIB e **∠API=∠APC-∠IPC**

Per il calcolo di $\angle AIP$, dalla figura, si ha:

- BCIP è ciclico perché dimostrato nella prima parte, quindi ha angoli opposti supplementari:

$(\angle IPC+\angle BPC)+\angle BCI=180°$, da cui: $\angle IPC=180°-\angle BCI-\angle BPC=180°-\gamma-(180°-y-z)=y+z-\gamma=\beta$ **(3)**

- Triangolo BIC: $\angle BIC=180°-\beta-\gamma$ **(4)**

- Triangolo PIC: $(\angle PIB+\angle BIC)+\angle IPC+\angle ICP=180°$
  da cui $\angle PIB=180°-\angle BIC-\angle IPC-\angle ICP=180°-(180°-\beta-\gamma)-\beta-(\gamma-z)=z$ **(5)**

Ora si può calcolare (dal Triangolo AIB e (5))

$\boldsymbol{\angle AIP=\angle AIB-\angle PIB=(180°-\alpha-\beta)-z}$ **(6)**

Per il calcolo di $\angle API$ dalla figura si ha:

- Triangolo APC:

  $\angle APC=180°-\angle PAC-\angle PCA=180°-(x+\alpha)-(2\gamma-z)=180°-x-\alpha-2\gamma+z$ **(7)**

Ora si può calcolare (da (7) e (3)):

$\boldsymbol{\angle API=\angle APC-\angle IPC=(180°-x-\alpha-2\gamma+z)-\beta}$ **(8)**

Imponendo la disuguaglianza tra angoli

$$\angle API \leq \angle AIP$$

ed esplicitando le espressioni trovate (le (6) e (8))

$$(180°-x-\alpha-2\gamma+z)-\beta \leq (180°-\alpha-\beta)-z$$

si ricava la disuguaglianza

$$z \leq x/2+\gamma$$

che è verificata, in quanto

$$z \leq \gamma$$

Poiché in un triangolo (nel nostro caso il triangolo AIP) ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore si ricava la tesi $AP \geq AI$.

Se $z=\gamma$ si ha $y=\beta+\gamma-z=\beta$, cioè P coincide con I e, di conseguenza, AP=AI.

Osservazione: la dimostrazione è stata fatta considerando $y \geq \beta$ e perciò $z \leq \gamma$ ma può essere ripetuta considerando le disuguaglianze opposte. CVD