Problema
(Tratto da: [Notes on Euclidean Geometry Kiran Kedlaya]() 1999
Problema 3 per la Sezione 1.1, pag. 2)

In un triangolo ABC, i punti D, E ed F sono presi sui lati BC, CA e AB, rispettivamente, in modo che

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$$

Dimostrare che il triangolo formato dai segmenti AD, BE e CF ha area 1/7 dell'area del triangolo ABC.

Soluzione

La soluzione si articola in due parti:

1. si scompone la figura in un insieme di triangoli e si trova una relazione tra alcuni di essi e quello in questione.
2. si dimostra la congruenza di due segmenti costituenti le basi di due triangoli aventi la medesima altezza, e quindi l'equivalenza di detti triangoli. Si estende poi il ragionamento ad altre due coppie di triangoli e si perviene al risultato.

1. Riportiamo sui lati AB, BC, CA i punti di trisezione dei lati in modo che sarà
   AE=EM=MA=CA/3
   AL=LF=FB=AB/3
   CD=DN=NB=BC/3

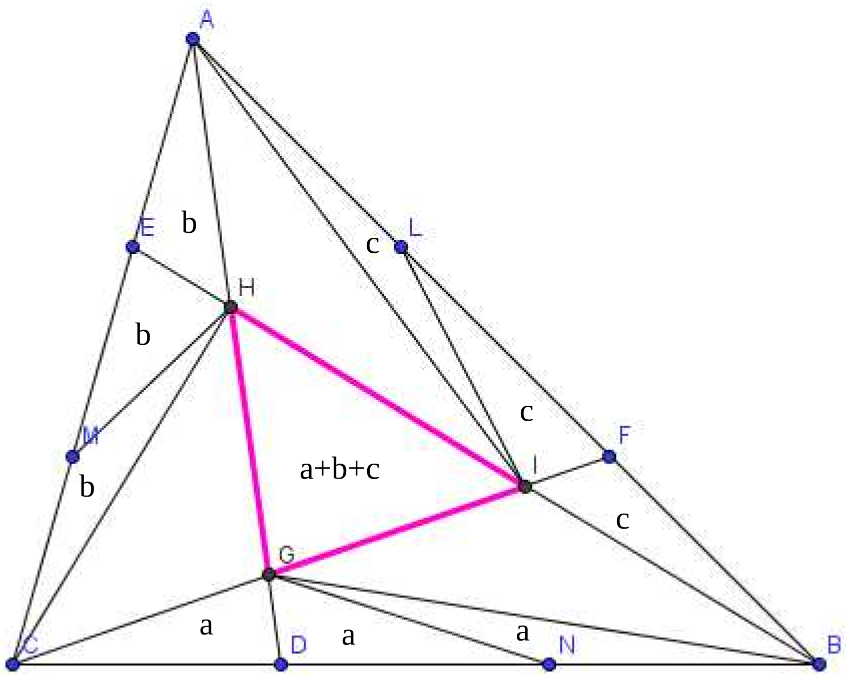

Figura 1

Si tratta di dimostrare che l'area del triangolo GHI è 1/7 di quella del triangolo ABC.

Unendo i vertici del triangolo ABC con quelli del triangolo GHI come mostrato nella **Figura 1** si ottengono le terne di triangoli equivalenti:
CDG≅DNG≅NBD(=a) perché hanno basi congruenti e stessa altezza relativa;
AEH≅EMH≅MCH(=b) perché hanno basi congruenti e stessa altezza relativa;
BFI≅FLI≅ALI(=c) perché hanno basi congruenti e stessa altezza relativa.

Calcolando l’area del triangolo ABC si ha:

$$A(ACD)+A(BCF)+A(ABE)-A(CDG)-A(BFI)-A(AEB)+A(GIH)=A(ABC) \qquad (1)$$

Ma risulta anche che

$$A(ACD)=A(BCF)=A(ABE)=A(ABC)/3 \qquad (2)$$

(triangoli con altezze congruenti a quelle di ABC e basi 1/3 di quelle di ABC).

Usando le (2) nella (1) si ottiene:

$$A(GIH)= A(CDG)+A(BFI)+A(AEB)=a+b+c \qquad (3)$$

Per il fatto che:

$$A(GIH)+A(GIB)+A(IHA)+A(HGC)+3a+3b+3c=A(ABC)$$

dimostrando che i triangoli GIH, GIB, IHA, HGC sono equivalenti si arriverebbe a:

$$4A(GIH)+3(a+b+c)=A(ABC), \qquad \text{ossia}$$
$$A(GIH)=1/7\ A(ABC)$$

Procediamo allora a dimostrare che i triangoli GIH, GIB, IHA, HGC sono equivalenti.

2.

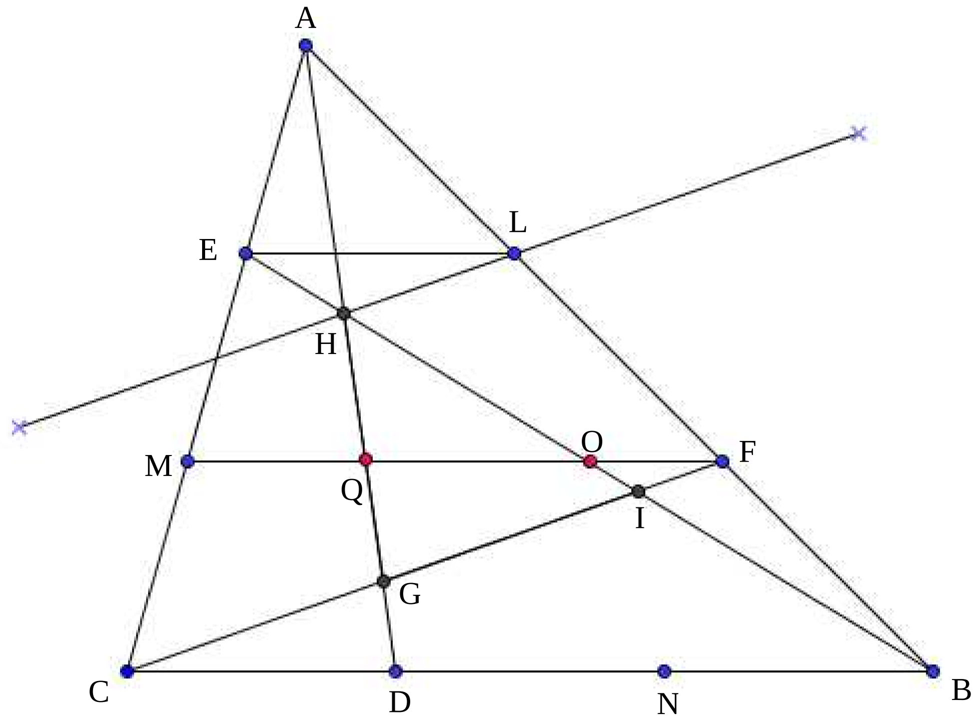

Figura 2

Congiungendo i punti E ed L e i punti M e F si ottengono segmenti paralleli al lato BC. Si useranno argomenti di similitudine.

Ci proponiamo di dimostrare che HI=IB (pervenendo così all'equivalenza dei triangoli GIH e GIB aventi basi congruenti HI=IB e la stessa altezza relativa (vedere la Figura 1)).

Poiché HI=EO+OI-EH e IB=OB-OI

e EO=OB per il teorema di Talete (le rette EL e MF sono parallele e i segmenti FL e BF sono congruenti), dimostrare che HI=IB è equivalente a dimostrare che

$$EH=2\ OI \qquad (4)$$

Con argomenti di similitudine dalla **Figura 2** si ha (con Sim(X,Y) si indica la similitudine tra i triangoli X e Y) (si usa il parallelismo tra le rette EL, MF e CB), ponendo CB=k:

Sim(ABC,AFM): MF=2/3 CB=2/3 k
Sim(ADC,AQM): MQ=2/3 CD=2/3 1/3 CB=2/3 k/3=2/9 k
Sim(BEL,BOF): OF=EL/2=CB/3/2=k/6
Si ricava: OQ=MF-MQ-OF=2/3 k – 2/9 k – k/6=5/18 k

Sim(BDH,OQH): $OH = \frac{OQ}{BD} \cdot BH = \frac{5}{12} \cdot BH$

Sim(OQH,HEP): $EH = \frac{EP}{OQ} \cdot OH = \frac{1}{6} \cdot BH$ (5)

Sim(BEL,BOF): $EB = \frac{EL}{OF} \cdot OB = \frac{EL}{OF} \cdot (BH - OH) = \frac{7}{6} BH$

Sim(BEL,BOF): $OB = \frac{EB}{2} = \frac{7}{12} \cdot BH$

Sim(BCI,OFI): $BI = \frac{CB}{OF} \cdot OI = 6 \cdot OI$

Ma OB=OI+BI=OI+6 OI=7 OI=7/12 BH

da cui, dalla eguaglianza più a destra (7 OI=7/12 BH), si ha: OI=1/12 BH (6)

Quindi confrontando (5) e (6) si ottiene il risultato voluto EH=2 OI.

Con costruzioni analoghe si dimostrano le congruenze AH=HG e CG=GI e le conseguenti equivalenze GIH≅IHA e GIH≅HGC.

In alternativa si noti che la retta HL risulta ora parallela alla retta CF e parallele risulteranno anche le rette AD e IN (inverso di Talete) per cui si ricava facilmente AH=HG e CG=GI, da cui le equivalenze cercate.