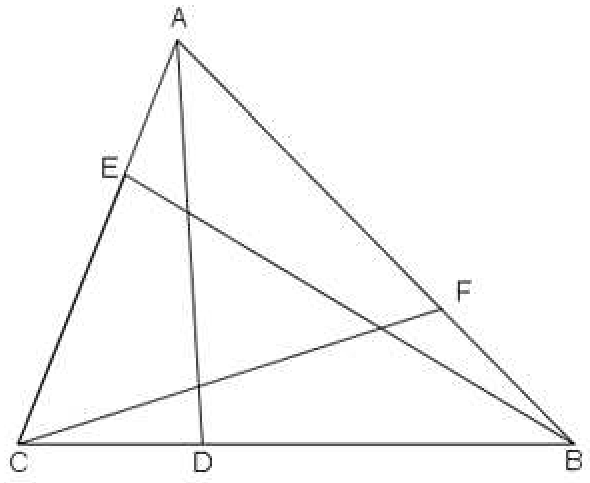


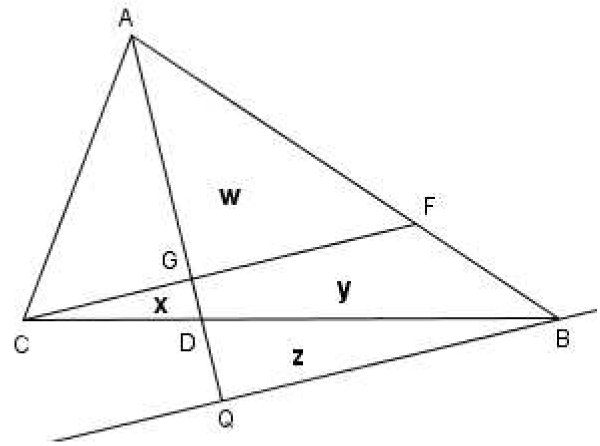
In un triangolo ABC, i punti D, E ed F sono presi sui lati BC, CA e AB, rispettivamente, in modo che

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \rho$$

Dimostrare che il triangolo formato dai segmenti AD, BE e CF ha area $\dfrac{(\rho-1)^2}{\rho^2+\rho+1}$ dell'area del triangolo ABC.

Tracciamo da B la parallela a CF ed indichiamo con Q il punto in cui tale retta interseca la semiretta AQ.

Sia *A* l'area del triangolo ABC e siano *x*, *y*, *z* e *w* le aree dei poligoni, come indicato della figura.



Si hanno le seguenti relazioni:

- $z = \rho^2 x$

  (i triangoli BQD e CDG sono simili con rapporto ρ^2)

- $x + y = \dfrac{1}{\rho+1} A$

  (il triangolo CBF ha base $\dfrac{1}{\rho+1}$ e stessa altezza del triangolo ABC)

- $w + y = \dfrac{\rho}{\rho+1} A$

  (il triangolo ABD ha base $\dfrac{\rho}{\rho+1}$ e stessa altezza del triangolo ABC)

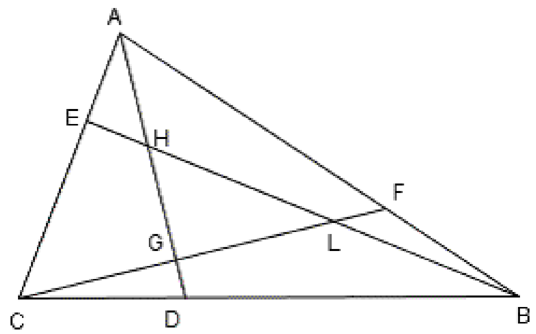
- $w = \left(\dfrac{\rho}{\rho+1}\right)^2 (x + y + z)$

  (i triangoli AGF e AQB sono simili con rapporto $\dfrac{\rho}{\rho+1}$).

Eliminando da queste uguaglianze *y*, *z* e *w*, si ottiene

$$x = \frac{1}{(\rho+1)(\rho^2+\rho+1)} A$$

La stessa area hanno, ovviamente, anche i triangoli LBF e EAH.



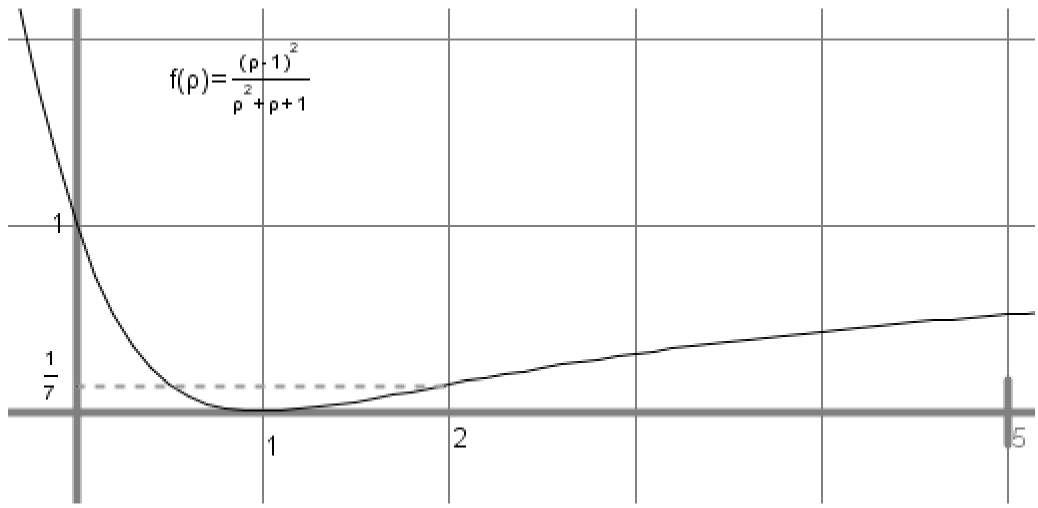
L'area del triangolo HGL si ottiene per sottrazione:

$$A_{HGL} = A_{ABC} - \left(A_{BCF} + A_{BAE} + A_{ACD}\right) + \left(A_{CDG} + A_{BFL} + A_{AEH}\right)$$

Quindi

$$A_{HGL} = A - 3\frac{1}{\rho+1}A + 3\frac{1}{(\rho+1)(\rho^2+\rho+1)}A = \ldots = \frac{(\rho-1)^2}{\rho^2+\rho+1}A$$

In figura è rappresentato l'andamento del rapporto $\dfrac{A_{HGL}}{A_{ABC}} = \dfrac{(\rho-1)^2}{\rho^2+\rho+1}$



Per $\rho = 2$ si ottiene $f(2) = \dfrac{1}{7}$

Per $\rho = 1$ si ottiene $f(1) = 0$: in tal caso D, E ed F sono i punti medi dei lati del triangolo ed i punti H, G e L coincidono col baricentro del triangolo.

Per $\rho = 0$ si ottiene $f(0) = 1$: in tale caso i punti D, E ed F coincidono con gli estremi del triangolo.

Infine, si ha $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \dfrac{(\rho-1)^2}{\rho^2+\rho+1} = 1$ in tale caso i punti D, E ed F *tendono* a coincidere con gli estremi del triangolo.