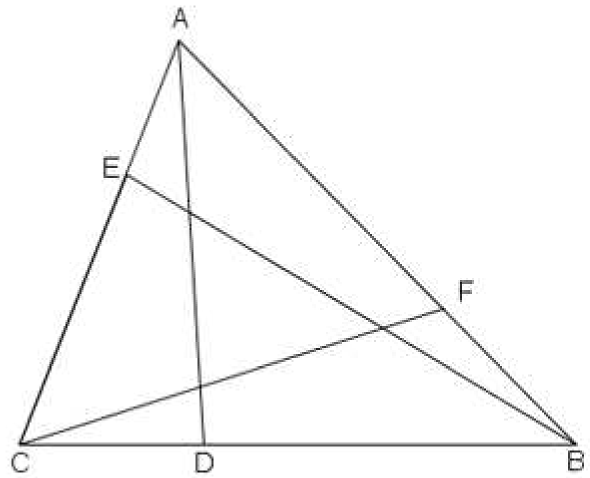


In un triangolo ABC, i punti D, E ed F sono presi sui lati BC, CA e AB, rispettivamente, in modo che

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$$

Dimostrare che il triangolo formato dai segmenti AD, BE e CF ha area $\frac{1}{7}$ dell'area del triangolo ABC.

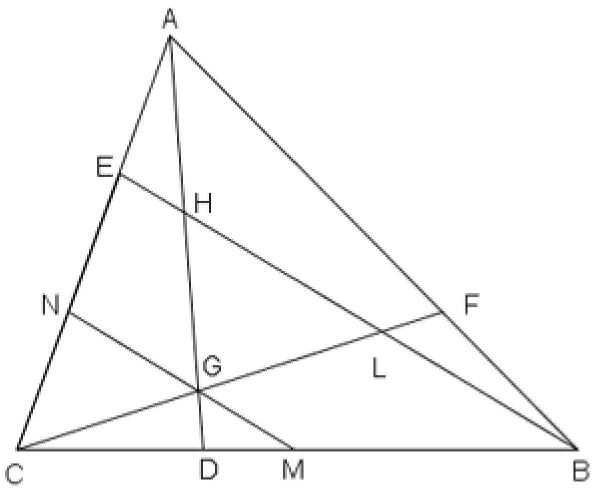
La dimostrazione sfrutta una scomposizione del triangolo ABC in sette triangoli equivalenti, uno dei quali è il triangolo in questione.

Dimostriamo dapprima che H, G ed L sono i punti medi dei segmenti AG, CL e BH, rispettivamente.

Dimostriamo che AH è congruente a HG.
Detto M il punto medio di BC ed N quello di EC, si ha che MN passa per G (*)
Poiché nel triangolo BCE si ha EN=NC e CM=MB, allora NM è parallelo ad EB.

Nel triangolo ANG, essendo AE=EN e EH è parallelo a NG, ne segue che AH=HG.

Allo stesso modo si dimostra che G ed L sono i punti medi dei segmenti CL e BH, rispettivamente.



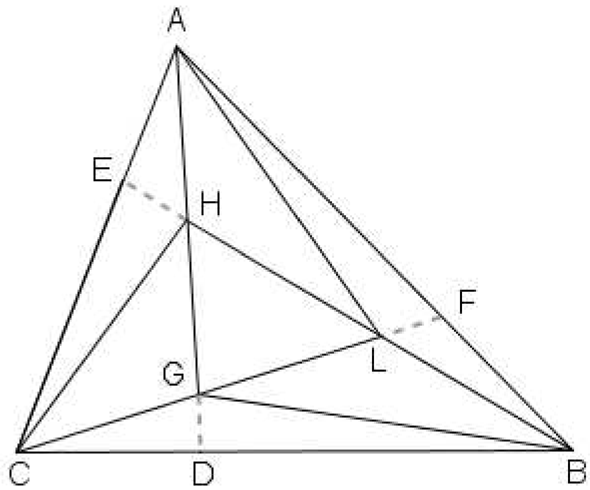
A questo punto, si può dimostrare che:

I triangoli AHL e HGL sono equivalenti perché hanno basi congruenti (H è punto medio di AG) e stessa altezza (vertice comune L).

Per lo stesso motivo, sono equivalenti BLG, HGL e CGH, HGL.

Anche i triangoli LBA e LHA sono equivalenti perché hanno basi congruenti (L é punto medio di BH) e stessa altezza (vertice comune A).

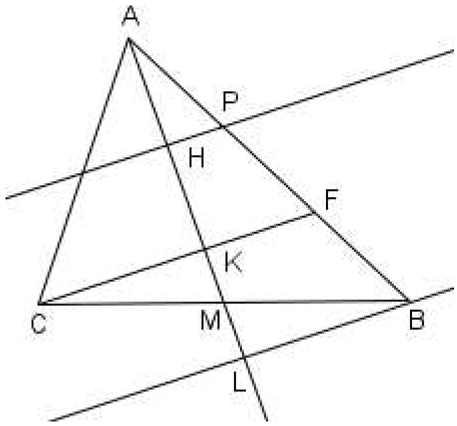
Per lo stesso motivo, sono equivalenti HAC, HGC e CGB, GLB.



Per transitività i sette triangoli hanno la stessa area e la tesi è quindi dimostrata.

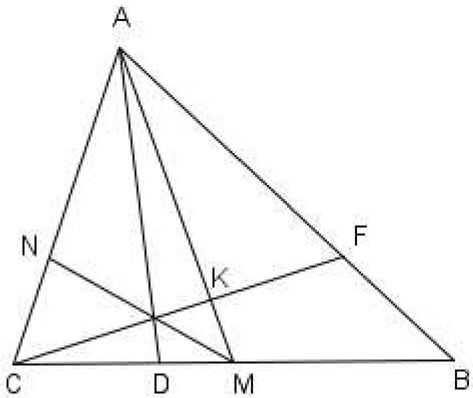
(*) Dimostriamo che MN passa per G.
CF incontra la mediana AM in un punto che la divide in parti tali che *AK=4KM*.
Per dimostrarlo, si traccino le parallele a CF per P (punto medio di AF) e per B e si osservi che, per il teorema di Talete, deve essere *AH=HK=KL*.

Inoltre si dimostra facilmente che *KM=ML* e quindi $KM = \frac{1}{4} KA$.



Consideriamo infine il triangolo ACM.
Per le ipotesi e per quanto dimostrato, si ha

$$\frac{KM}{KA} \cdot \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CD}{DM} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 1$$



e quindi, per il teorema di Ceva,
(http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Ceva)
i tre segmenti passano per uno stesso punto, che è G.