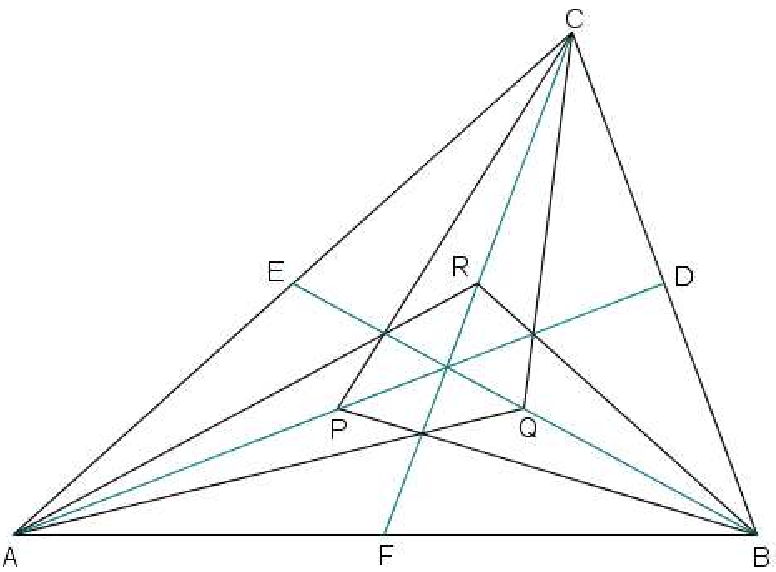
Nel triangolo ABC, siano D, E ed F i punti medi dei lati e siano P, Q ed R i punti medi delle mediane AD, BE e CF, rispettivamente, come mostrato in figura.
Dimostrare che il valore di

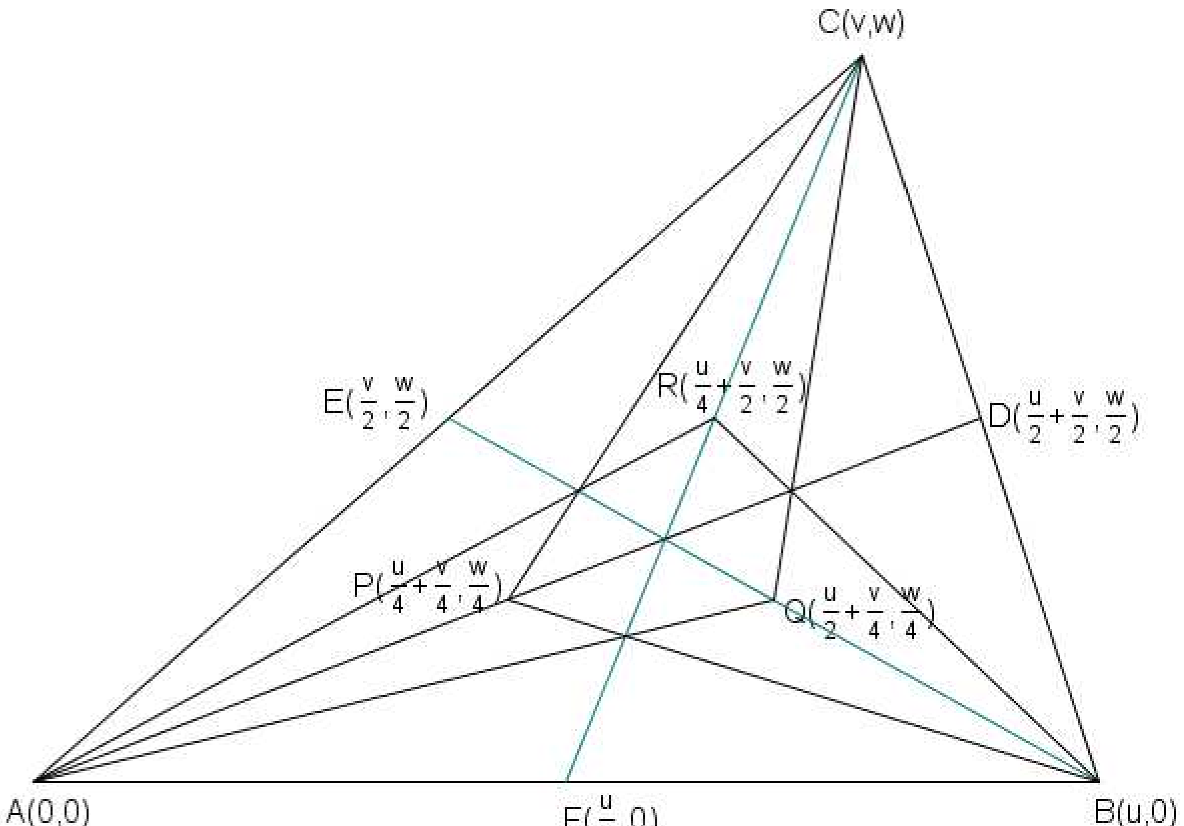
$$\frac{AQ^2 + AR^2 + BP^2 + BR^2 + CP^2 + CQ^2}{AB^2 + AC^2 + BC^2}$$

non dipende dal triangolo e trovare tale valore.

International Mathematical Talent Search – Round 32 - problema 5



Dimostrazione mediante sistema di coordinate



Assumiamo come origine dl riferimento cartesiano il vertice A del triangolo e come asse delle ascisse il suo lato AB.
Le coordinate dei punti sono indicate in figura.
Per i segmenti interessati alla relazione si ha

$$AQ^2 = \left(\frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right)^2 + \left(\frac{w}{4}\right)^2 = \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{16} + \frac{uv}{4} + \frac{w^2}{16}$$

$$AR^2 = \left(\frac{u}{4} + \frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{16} + \frac{v^2}{4} + \frac{uv}{4} + \frac{w^2}{4}$$

$$BP^2 = \left(\frac{3u}{4} - \frac{v}{4}\right)^2 + \left(\frac{w}{4}\right)^2 = \frac{9u^2}{16} + \frac{v^2}{16} - \frac{3uv}{8} + \frac{w^2}{16}$$

$$BR^2 = \left(\frac{3u}{4} - \frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2 = \frac{9u^2}{16} + \frac{v^2}{4} - \frac{3uv}{4} + \frac{w^2}{4}$$

$$CP^2 = \left(\frac{3v}{4} - \frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{3w}{4}\right)^2 = \frac{u^2}{16} + \frac{9v^2}{16} - \frac{3uv}{8} + \frac{9w^2}{16}$$

$$CQ^2 = \left(\frac{3v}{4} - \frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{3w}{4}\right)^2 = \frac{u^2}{4} + \frac{9v^2}{16} - \frac{3uv}{4} + \frac{9w^2}{16}$$

Di conseguenza, sommando membro a membro, si ottiene:

$$AQ^2 + AR^2 + BP^2 + BR^2 + CP^2 + CQ^2 = \frac{7u^2}{4} + \frac{7v^2}{4} + \frac{7w^2}{4} - \frac{7uv}{4}$$

La somma dei quadrati dei lati viene espressa in funzione delle coordinate dei vertici:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = u^2 + v^2 + w^2 + (u - v)^2 + w^2 = 2u^2 + 2v^2 + 2w^2 - 2uv$$

$$\frac{AQ^2 + AR^2 + BP^2 + BR^2 + CP^2 + CQ^2}{AB^2 + AC^2 + BC^2} = \frac{\frac{7u^2}{4} + \frac{7v^2}{4} + \frac{7w^2}{4} - \frac{7uv}{4}}{2u^2 + 2v^2 + 2w^2 - 2uv} = \frac{\frac{7}{4}\left(u^2 + v^2 + w^2 - uv\right)}{2\left(u^2 + v^2 + w^2 - uv\right)} = \frac{7}{8}$$