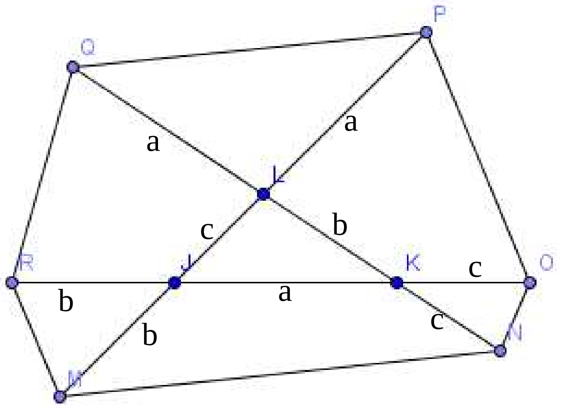

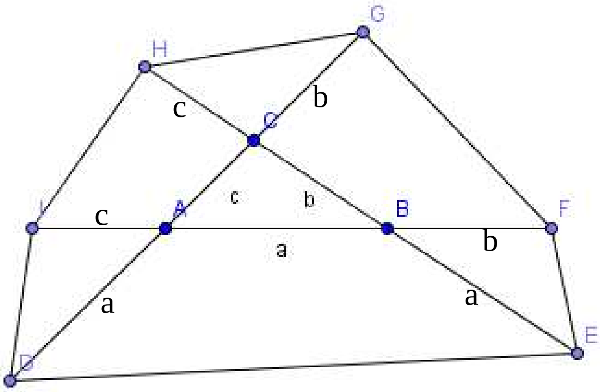

Diciamo A l'area del triangolo ABC (o JKL) di lati a, b e c.

Area Esagono MNOPQR = A_1 = A +
+ (Area Triangolo MNL – A) +
+ (Area Triangolo JOP – A) +
+ (Area Triangolo RKQ – A) +
+ Area Triangolo LPQ +
+ Area Triangolo RMJ +
+ Area Triangolo KNO =

$$= A+(A\frac{b+c}{c}\frac{b+c}{b}-A)+(A\frac{c+a}{a}\frac{c+a}{c}-A)+(A\frac{a+b}{a}\frac{a+b}{b}-A)+A\frac{a}{b}\frac{a}{c}+A\frac{b}{c}\frac{b}{a}+A\frac{c}{a}\frac{c}{b}=$$

$$= -2A+A\left(\frac{(b+c)^2+a^2}{bc}+\frac{(c+a)^2+b^2}{ca}+\frac{(a+b)^2+c^2}{ab}\right)=4A+A\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

Nota: Per il calcolo delle aree dei triangoli MNL, JOP, RKQ, LPQ, RMJ, KNO si veda (*)

Osservando l'esagono di destra si vede che i triangolo ABC, BFE, CGH, DAI sono tutti congruenti perché hanno rispettivamente due lati (per costruzione) e l'angolo compreso congruenti (angoli opposti al vertice ..).

Area Esagono DEFGHI = A_2 = A + (Area Triangolo DEC – A) +
+ (Area Triangolo AFG – A) +
+ (Area Triangolo IBH – A) +
+ Area Triangolo EFB +
+ Area Triangolo CGH +
+ Area Triangolo AID =

$$= A+\left(A\frac{a+c}{c}\frac{a+b}{b}-A\right)+\left(A\frac{a+b}{a}\frac{c+b}{c}-A\right)+\left(A\frac{a+c}{a}\frac{b+c}{b}-A\right)+A+A+A=$$

$$= 4A+A\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

Nota: Per il calcolo delle aree dei triangoli DEC, AFG, IBH, EFB, AID si veda (*)

Quindi gli esagoni sono equivalenti.

(*) I triangoli ABC e A’B’C’ hanno un angolo congruente.

Dette A e A’ le loro aree, si ha

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'} = \frac{\frac{1}{2}ch}{\frac{1}{2}c'h'} = \frac{c}{c'}\frac{h}{h'} = \frac{c}{c'}\frac{b}{b'}$$

essendo $\frac{h}{h'} = \frac{b}{b'}$ per la similitudine dei triangoli rettangoli AHC e A’H’C’