Soluzione algebrica

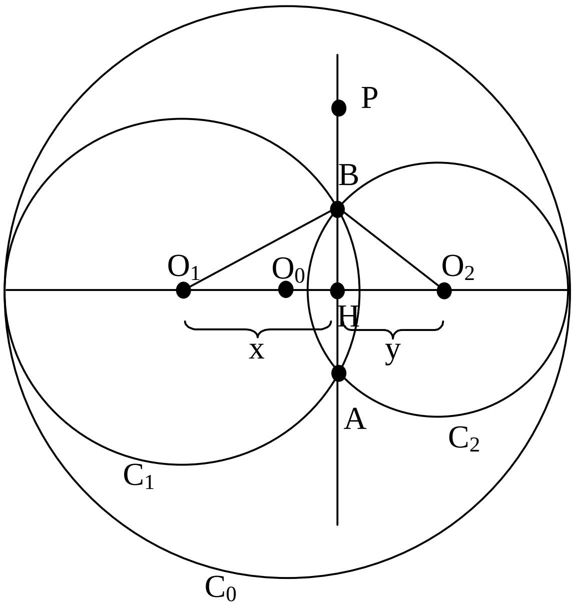
Definiamo
O_0: centro di C_0
r_0: raggio di C_0
O_{01}: centro della circonferenza tangente a C_0, C_1 e AB
C_{01}: circonferenza tangente a C_0, C_1 e AB
r_x: raggio di C_{01}
O_{02}: centro della circonferenza tangente a C_0, C_2 e AB
C_{02}: circonferenza tangente a C_0, C_2 e AB
r_y: raggio di C_{02}

La distanza tra i centri O_1 e O_2 sia pari a d; ne segue che il raggio r_0 della circonferenza C_0 è dato da

$$r_0=(r_1+r_2+d)/2.$$

(Assumiamo come dati del problema $r_1 \geq r_2$ e d).

Determino preventivamente
$x=O_1H$ e $y=O_2H$:



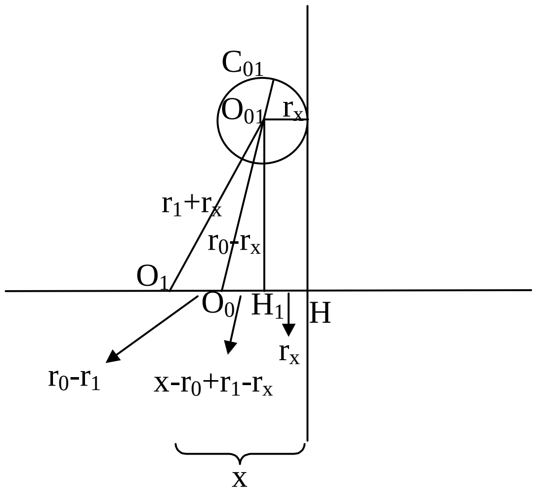
(figura 1)

$x+y=O_1O_2=d$ perché la distanza tra i centri delle circonferenze C_1 e C_2 è assegnata;
$x^2-y^2=r_1^2-r_2^2$ perché i punti P sulla retta AB soddisfano a $O_1P^2-O_2P^2= r_1^2-r_2^2$ e $H \in AB$ è l'intersezione di AB con la retta O_1O_0.

risolvendo il sistema in x e y si trova:

$$\begin{cases} x = \dfrac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \\ y = \dfrac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d} \end{cases}$$

I segmenti indicati nella figura seguente si esprimono in termini di r_1, r_0, r_x e x (H_1 è la proiezione di O_{01} su O_1O_0):



(figura 2)

$H_1H=r_x$ (incognita)
$O_1H=x$ (già calcolato)
$O_1O_0=r_0-r_1$ (dai dati geometrici)
$O_0H_1=x-r_0+r_1-r_x$ (“miscuglio” tra dati e incognita)
$O_{01}O_1=r_1+r_x$ (“)
$O_{01}O_0=r_0-r_x$ (“)
$O_1H_1=x-r_x$ (“)

Esprimendo in due modi diversi $O_{01}H_1^2$ con il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli $O_1H_1O_{01}$ e $O_0H_1O_{01}$ si ha l’equazione che determina r_x:

$(O_{01}H_1^2=)$ $\quad O_{01}O_0^2 - O_0H_1^2 = O_{01}O_1^2 - O_1H_1^2$ $\quad$ cioè:

$$(r_0 - r_x)^2 - (x - r_0 + r_1 - r_x)^2 = (r_1 + r_x)^2 - (x - r_x)^2$$

da cui r_x: $\quad 2r_0 r_x = (x + r_1)(r_0 - r_1)$

Con un ragionamento identico si trova il raggio r_y di C_{02}:

$$(r_0 - r_y)^2 - (r_0 - r_1 - y + r_x)^2 = (r_2 + r_y)^2 - (y - r_y)^2$$

da cui r_y: $\quad 2r_0 r_y = (y + r_2)(r_0 - r_2)$

Sostituendo x, y e r_0 in termini di r_1 e r_2 e d nell’espressione di r_x si ottiene:

$$2r_0 r_x = (x + r_1)(r_0 - r_1) = \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} + r_1 \right)\left(\frac{r_1 + r_2 + d}{2} - r_1 \right) = \frac{(r_1^2 - r_2^2 + d^2 + 2dr_1)(r_2 - r_1 + d)}{4d} =$$

$$= \frac{1}{4d}\left(-(r_1 - r_2)^2 (r_1 + r_2) - d(r_1 - r_2)^2 + d^2 (r_1 + r_2) + d^3 \right) = f(r_1, r_2, d)$$

Si noti che nell’espressione precedente $f(r_1,r_2,d)$ è una funzione simmetrica rispetto allo scambio delle variabili r_1 e r_2, cioè

$$f(r_1,r_2,d)= f(r_2,r_1,d),$$

che $r_0=(r_1+r_2+d)/2$ è pure simmetrica e che l'espressione relativa a r_y si ottiene semplicemente scambiando r_1 ed r_2. Ne segue che

$$r_x = r_y \qquad \text{cvd}$$