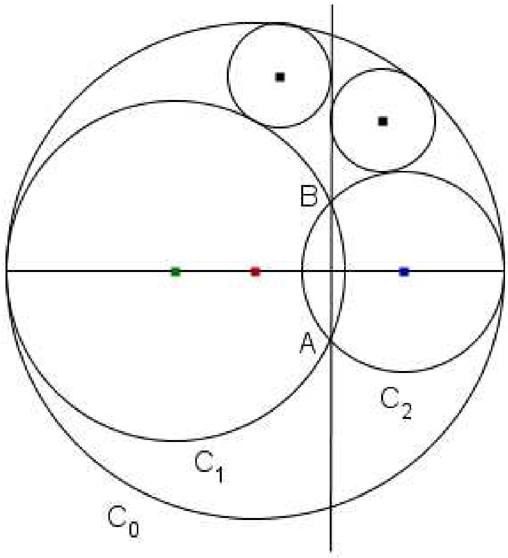
http://www.diflo.it/read.php?what=ex&ion=items&cat_id=1&parent_id=1&start=9

Nella figura i centri delle circonferenze C_0, C_1 e C_2 sono allineati e C_1 e C_2 sono tangenti a C_0.

A e B sono i punti di intersezione di C_1 e C_2.

Dimostrare che sono congruenti la circonferenza tangente a C_0, C_1 e ad AB e la circonferenza tangente a C_0, C_2 e ad AB.

International Mathematical Talent Search – Round 20 - problema 5

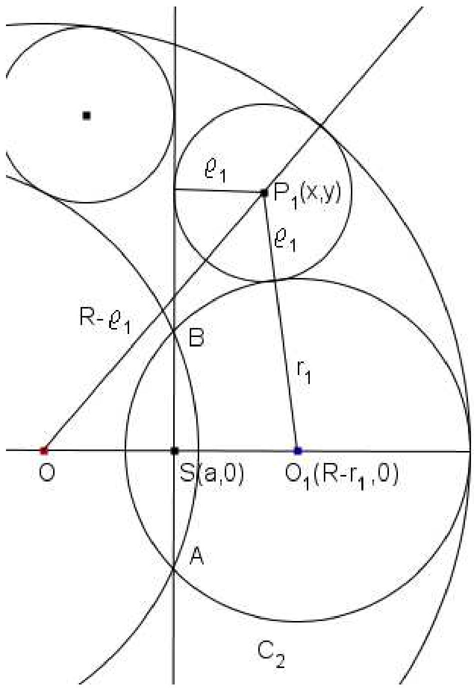


Dimostrazione

La dimostrazione usa tecniche di geometria analitica.

Assumiamo le coordinate rispetto l'origine il centro O delle circonferenza C_0 e l'asse x la retta dei centri delle circonferenze.

Poniamo:
R il raggio della circonferenza C0
r_1 il raggio della circonferenza C_1
ρ_1 il raggio della circonferenza tangente a C_0, C_1 e ad AB
(x,y) le coordinate del suo centro P1
a l'ascissa del punto S in cui la retta AB interseca l'asse x.



In conseguenza alle condizioni di tangenza, x, y e ρ_1 debbono soddisfare le equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (R - \rho_1)^2 \\ (x - R + r_1)^2 + y^2 = (r_1 + \rho_1)^2 \\ x - a = \rho_1 \end{cases}$$

Sottraendo le prime due si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (R - \rho_1)^2 \\ x^2 - (x - R + r_1)^2 = (R - \rho_1)^2 - (r_1 + \rho_1)^2 \\ x - a = \rho_1 \end{cases}$$

La seconda equazione diventa:

$$2x(R - r_1) + (R - r_1)^2 = (R - \rho_1)^2 - (r_1 + \rho_1)^2$$

Sostituendo $x = a + \rho_1$ si ottiene

$$2(a + \rho_1)(R - r_1) + (R - r_1)^2 = (R - \rho_1)^2 - (r_1 + \rho_1)^2$$

Calcolando ρ_1 si ottiene, infine

$$\rho_1 = \frac{(R - a)(R - r_1)}{2R}$$

Per il calcolo di ρ_2 occorre solo fare alcune modifiche nel sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (R - \rho_2)^2 \\ (x + R - r_2)^2 + y^2 = (r_2 + \rho_2)^2 \\ a - x = \rho_1 \end{cases}$$

Questa volta si ottiene:

$$\rho_2 = \frac{(R + a)(R - r_2)}{2R}$$

La condizione perché i due raggi siano uguali è quindi

$$\frac{(R - a)(R - r_1)}{2R} = \frac{(R + a)(R - r_2)}{2R}$$

che assegna ad a il valore

$$a = \frac{R(r_2 - r_1)}{2R - r_2 - r_1}$$

Resta da calcolare *a*, in modo da vedere se assume proprio questo valore.

a è l'ascissa del punto di intersezione delle due circonferenze C_1 e C_2.

$$\begin{cases}(x-R+r_1)^2+y^2=r_1^{\,2}\\(x+R-r_2)^2+y^2=r_2^{\,2}\end{cases}$$

Sottraendo le equazioni

$$(x-R+r_1)^2-(x+R-r_2)^2=r_1^{\,2}-r_2^{\,2}$$
$$(x-R+r_1-x-R+r_2)(x-R+r_1+x+R-r_2)=r_1^{\,2}-r_2^{\,2}$$
$$(r_1+r_2-2R)(2x+r_1-r_2)=r_1^{\,2}-r_2^{\,2}$$
$$2x+r_1-r_2=\frac{r_1^{\,2}-r_2^{\,2}}{r_1+r_2-2R}$$
$$2x=\frac{(r_1-r_2)(r_1+r_2)}{r_1+r_2-2R}-(r_1-r_2)$$
$$2x=\frac{(r_1-r_2)[(r_1+r_2)-(r_1+r_2-2R)]}{r_1+r_2-2R}$$
$$2x=\frac{2R(r_1-r_2)}{r_1+r_2-2R}$$
$$x=\frac{R(r_2-r_1)}{2R-r_1-r_2}$$

che è il valore trovato e che rende i due raggi uguali.