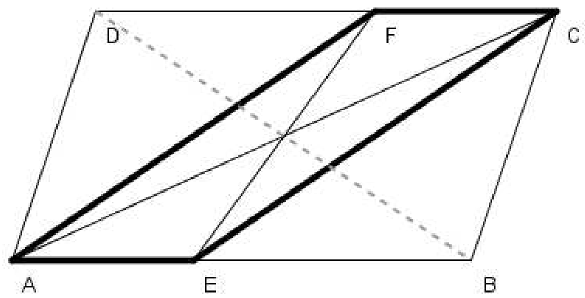
Dimostrazioni proposte

1) Su ciascuno dei lati opposti AB e CD del parallelogramma ABCD si prendano i punti E, rispettivamente, F in modo che AE = CF. Dimostrare che EF passa per il centro del parallelogramma (centro = intersezione delle diagonali).

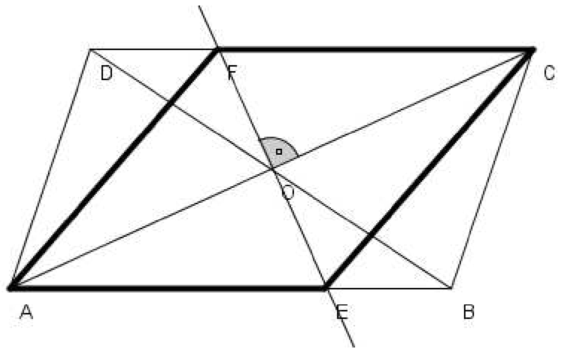


Dimostrazione
Il quadrilatero AECF è un parallelogramma poiché ha i due lati opposti AE e CF congruenti e paralleli.

Di conseguenza le sue diagonali AC e FE si intersecano nel punto medio.

Ma AC è anche la diagonale del parallelogramma ABCD.

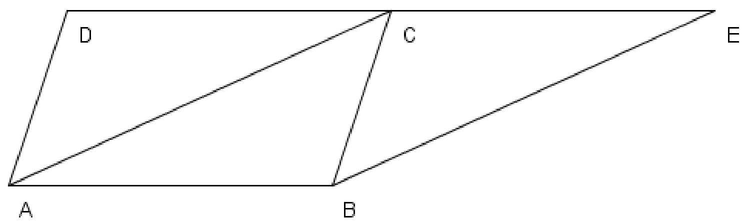
2) Una retta passa per il centro O di un parallelogramma ABCD ed è perpendicolare alla diagonale AC. Tale retta interseca i lati opposti AB e CD in E, rispettivamente, F. Dimostrare che AECF è un rombo.



Dimostrazione
Innanzitutto si dimostra che $FO \cong OE$ (2° criterio applicato ai triangoli FOD e EOB.

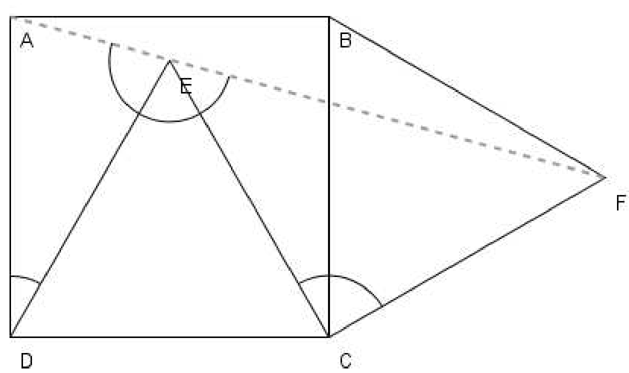
Il quadrilatero AECF è un rombo perché ha le diagonali che si intersecano nel punto medio e sono perpendicolari per ipotesi.

3) Due parallelogrammi ABCD e ABEC sono tali che AC è diagonale del primo è lato del secondo. Dimostra che i punti D, C ed E sono allineati e che C e punto medio del segmento DE.



Dimostrazione
DC e CE sono paralleli ad AB e quindi sono paralleli tra loro. Siccome passano per C sono sulla stessa retta.
Per la proprietà transitiva della congruenza, DC e CE sono congruenti. C perciò è punto medio del segmento DE.

4) E' dato il quadrato ABCD. Su CD, internamente al quadrato, si costruisce il triangolo equilatero CDE; su BC, esternamente al quadrato,si costruisce il triangolo equilatero BCF. Dimostrare che i punti A, E ed F sono allineati.

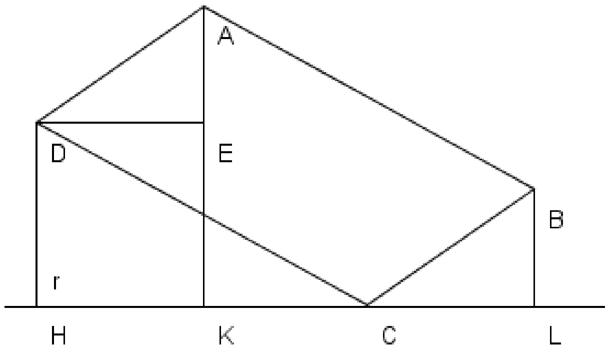


Dimostrazione
Si verifica che $A\hat{D}E = 30°$ perciò $A\hat{E}D = 75°$ (ADE è isoscele!)
$F\hat{C}E = 90°$ perciò $C\hat{E}F = 45°$ (ECF è isoscele!)

Infine $D\hat{E}C = 60°$

I tre angoli in E, sommati danno un angolo piatto e perciò i punti A, E ed F sono allineati.

5) Sia ***r*** una retta condotta per il vertice C di un parallelogramma ABCD. Dimostrare che distanza di A da ***r*** è uguale alla somma delle distanza di B e D da ***r***.
(Occorre tracciare da D un opportuno segmento)



Dimostrazione
Detti H, K e L le proiezioni ortogonali di D, A e rispettivamente B sulla retta e, bisogna dimostrare che

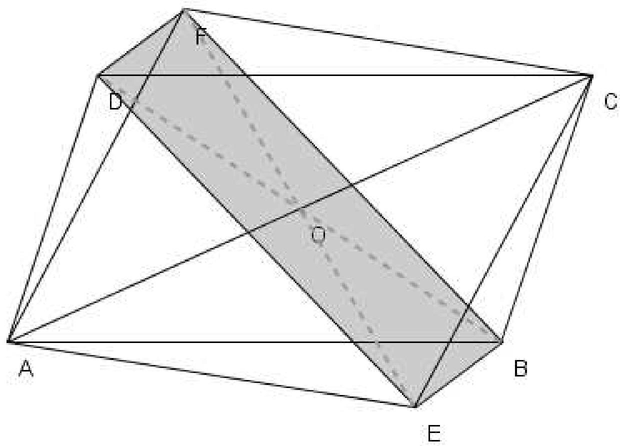
AK = DH + BL.

Da D tracciare la parallela ad r, che è quindi perpendicolare ad AK.

I triangoli DEA e CLB sono congruenti (AD = BC, un angolo retto e gli angoli in D e C congruenti per il parallelismo).

Quindi AE = BL. Poiché EK = DH allora AK = DH + BL.

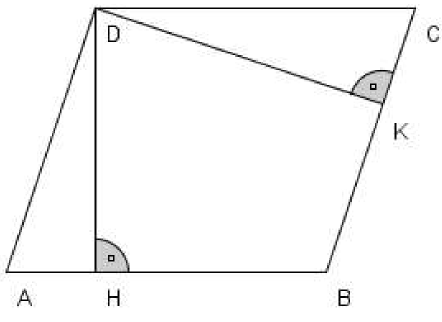
6) I parallelogrammi ABCD e AECF hanno la diagonale AC in comune. Dimostra che anche BEDF è un parallelogramma.



Dimostrazione
Poiché i parallelogrammi ABCD e AECF hanno la diagonale AC in comune allora le altre loro due diagonali BD e EF passano per il punto medio O di questa.

Ma le altre due diagonali sono le diagonali del quadrilatero BEDF, che è quindi un parallelogramma per il criterio delle diagonali.

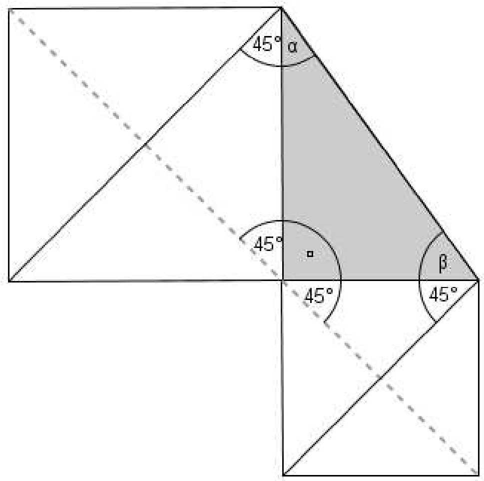
7) Dimostrare che se un parallelogramma ha le altezze congruenti allora è un rombo.



Dimostrazione
Siano DH e DK le altezze congruenti.

I triangoli ADH e CDK sono congruenti (criterio dei triangoli rettangoli: DH = DK, l'angolo retto e gli angoli in A e C perché opposti di un parallelogramma)

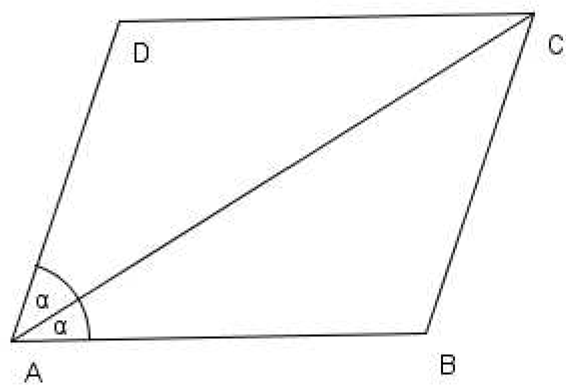
Quindi AD = DC ed il parallelogramma è un rombo perché ha due lati consecutivi congruenti.



8) Sui cateti di un triangolo rettangolo si costruiscono, esternamente al triangolo, i rispettivi quadrati.
Dimostrare che due diagonali di questi quadrati sono sulla stessa retta e che le altre due diagonali sono parallele (Nota: ragionare sugli angoli)

Dimostrazione
Le due diagonali tratteggiate sono sulla stessa retta perché l'angolo complessivo formato nel vertice dell'angolo retto è piatto.

Per dimostrare che le altre due diagonali sono parallele o si fa vedere che gli angoli che essi formano con l'ipotenusa sono supplementari ($\alpha + \beta = 90°$!) oppure basta considerare che sono entrambe perpendicolari alla retta delle altre due.



9) La diagonale AC di un parallelogramma ABCD è bisettrice dell'angolo $B\hat{A}D$. Dimostra che AC è bisettrice anche di $B\hat{C}D$ e che ABCD è un rombo.

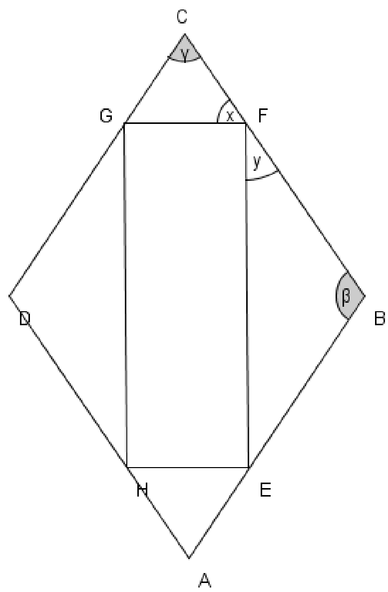
Dimostrazione
Se consideriamo i triangoli ACD e ACB, essi hanno gli angoli in A congruenti per ipotesi e gli angoli in D e B congruenti perché opposti di un parallelogramma.

Di conseguenza anche gli angoli in C sono congruenti.

Inoltre tali angoli debbono essere congruenti a quelli in A (perché $\hat{A} \cong \hat{C}$!).

I triangoli sono quindi isosceli e AD = DC e AB = BC.

ABCD è quindi un rombo.



10) Dato il rombo ABCD, su ciascuno dei suoi lati AB, BC, CD e DA si prende un punto E, rispettivamente, F, G e H in modo che EA = FC = GC = HA. Dimostrare che EFGH è un rettangolo.

Dimostrazione
Notare che, per l'ipotesi, i triangoli CGF e BFE sono isosceli.

Poiché $\gamma + \beta = 180°$ perché angoli consecutivi del rombo,

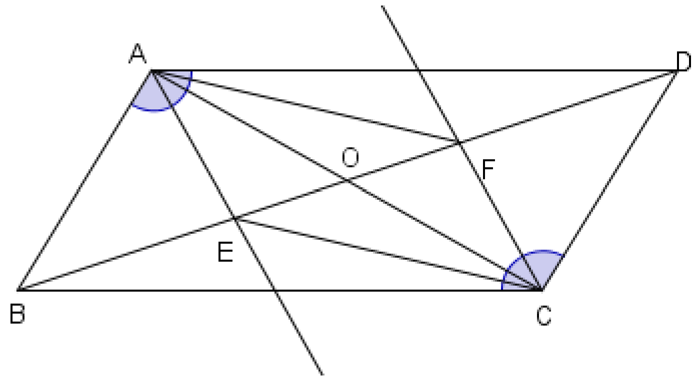
si ricava che $x + y = 90°$.

Il quadrilatero EFGH è un rettangolo perché ha gli angoli retti.

Un'altra dimostrazione può essere fatta considerando le diagonali del rombo e facendo vedere che GF e FE sono perpendicolari ad esse.

11) ABCD è un parallelogramma. Tracciate le bisettrici degli angoli interni opposti $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$, siano E, rispettivamente, F i punti di intersezione di tali bisettrici con la diagonale BD. Dimostra che AECF è un parallelogramma

Dimostrazione



Per dimostrare che AECF è un parallelogramma conviene usare il criterio delle diagonali.
Sia O l'intersezione delle diagonali del parallelogramma ABCD.

Allora AO = OC e BO = OD.

Se dimostriamo che EO = OF allora AECF è un parallelogramma in quanto le sue diagonali si intersecano nel rispettivo punto medio.

Consideriamo i triangoli ABE e DCF.

Ad essi si può applicare il secondo criterio di congruenza dei triangoli, poiché hanno

AB = DC (lati opposti del parallelogramma)

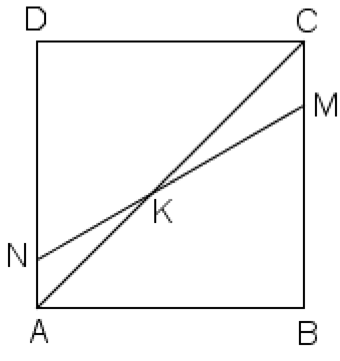
$A\hat{B}E \cong C\hat{D}F$ (rette parallele AB e CD, trasversale CD, alterni interni)

$B\hat{A}E \cong D\hat{C}F$ (per ipotesi essi sono la metà degli angoli opposti $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$, del parallelogramma)

Di conseguenza, i lati BE e FD sono congruenti e quindi EO = OF per differenza di segmenti congruenti:

EO =BO – BE e OF = DO - DF

12) ABCD è un quadrato AC è una sua diagonale e NM è un segmento avente gli estremi sui lati opposti AD e BC e che interseca la diagonale in K.



Quanto misura l'angolo $C\hat{K}M$, se l'angolo $D\hat{N}K$ misura 60°?

Risoluzione

$A\hat{N}K = 120°$ perché adiacente a $D\hat{N}K = 60°$

$N\hat{A}K = 45°$ perché la diagonale del quadrato è bisettrice dell'angolo retto.

$N\hat{K}A = 15°$ per differenza degli angoli nel triangolo NAK.

$C\hat{K}M = 15°$ perché opposto al vertice di $N\hat{K}A$